Álgebra



Intelectum
Álgebra

IX

Indicadores de logro

Unidad 1

- Identifica los elementos de una expresión exponencial y analiza los diversos teoremas.
- Calcula resultados aplicando propiedades básicas sobre exponentes.
- Evalúa las leyes de una ecuación exponencial (bases iguales, exponentes iguales y semejanza).
- Utiliza las propiedades sobre teoría de exponentes para la resolución de ecuaciones exponenciales.
- Analiza las clases de expresiones algebraicas: monomio y polinomio, además define el grado relativo y absoluto de un polinomio y su valor numérico.
- Completa polinomios y calcula su valor numérico.
- Analiza los polinomios al calcular su valor absoluto y relativo.
- Identifica los principales productos notables.
- Simplifica expresiones utilizando productos notables.
- Identifica el algoritmo de Horner y Ruffini para la división de polinomios.
- Aplica técnicas de división de polinomios (Horner y Ruffini).

Unidad 2

- Analiza el desarrollo de los cocientes notables.
- Utiliza los principales cocientes notables en la resolución de problemas.
- Divide expresiones algebraicas aplicando cocientes notables.
- Identifica los casos para aplicar los métodos de factorización.
- Aplica el método del aspa simple o doble para determinar los factores primos de expresiones algebraicas.
- Evalúa el algoritmo del MCM y el MCD al aplicarlo.
- Aplica y calcula la definición de MCD y MCM comparando dos o más expresiones algebraicas.
- Discrimina entre fracción impropia y compleja, evalúa el procedimiento utilizado en los problemas.
- Identifica los radicales semejantes y radicales homogéneos, además evalúa la construcción del factor racionalizante.
- Homogeniza radicales en la resolución de problemas.
- Identifica la clasificación de números complejos.
- Utiliza propiedades para simplificar o calcular expresiones imaginarias.

ALTITUD DE UN CUERPO

Valiéndonos del álgebra para una circunstancia real, las ecuaciones exponenciales son aplicadas modelando diversas situaciones esto particularmente a situaciones físicas como la velocidad, aceleración, presión y altitud.

Estos modelos matemáticos nos permiten entender dicho fenómeno y de esta manera lograr una predicción en el futuro.

Tal es por ejemplo el caso que se presenta el poder determinar la altitud de un avión en un momento determinado considerando para ello, en tal instante, su presión atmosférica a una determinada altitud(P), la presión atmosférica al nivel del mar(Po) y la temperatura del aire(T, °C):

$$P = \frac{Po}{\frac{H}{a^{bT+c}}}; a, b \text{ y } c \in \mathbb{N}$$

Contenido:

Unidad 1

- **Teoría de exponentes.**
- **Ecuación exponencial.**
- **Polinomios.**
- **Productos notables.**
- **División de polinomios.**

Unidad 2

- **Cocientes notables.**
- **Factorización.**
- **MCD - MCM y fracciones algebraicas.**
- **Radicación - Racionalización.**
- **Números complejos.**

Unidad 3

- **Ecuaciones de primer grado. Planteo de ecuaciones.**
- **Sistema de ecuaciones lineales.**
- **Ecuaciones de segundo grado. Planteo de ecuaciones.**
- **Desigualdades e inecuaciones.**

Unidad 4

- **Valor absoluto.**
- **Logaritmos.**
- **Funciones.**
- **Progresiones.**

Unidad 3

- Evalúa la naturaleza de la raíz o solución de las ecuaciones.
- Utiliza procedimientos aritméticos para resolver ecuaciones de primer grado.
- Discrimina entre el método de sustitución, igualación y reducción para la resolución de sistemas de ecuaciones.
- Comprende el uso de las matrices en los sistemas de ecuaciones lineales y las define correctamente dentro de una ecuación matricial.
- Interpreta geométricamente las soluciones de los sistemas de ecuaciones según su naturaleza y los resuelve aplicando el método de reducción, sustitución o el método de igualación.
- Aplica el método de factorización o la fórmula general para la resolución de ecuaciones de segundo grado.
- Identifica variables dentro de un enunciado y las expresa utilizando ecuaciones de primer o segundo grado.
- Identifica intervalos acotados, no acotados, abiertos y cerrados.
- Identifica las distintas propiedades sobre intervalos.
- Expresa gráficamente los diferentes tipos de intervalos.
- Determina el conjunto solución de las inecuaciones.

Unidad 4

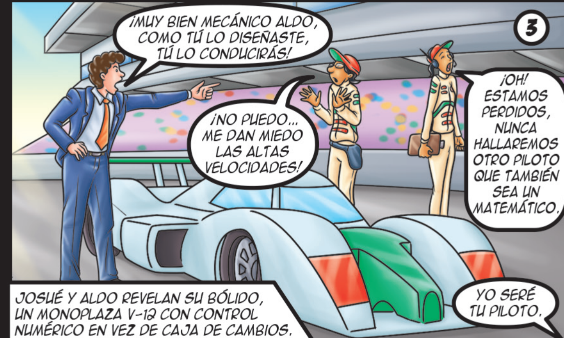
- Evalúa la aplicación de valor absoluto y analiza las ecuaciones de primer y segundo grado que utilizan valor absoluto.
- Aplica las definiciones de valor absoluto dentro de ecuaciones.
- Evalúa las diversas propiedades de logaritmos.
- Utiliza la definición de logaritmos en las ecuaciones para calcular el valor de la incógnita.
- Discrimina entre relación y función, además identifica el dominio y el rango de una función.
- Identifica y define las funciones especiales (lineal, constante, de identidad, valor absoluto, cuadrática y de proporcionalidad).
- Diferencia gráficamente una función de una relación utilizando diagramas de Venn.
- Representa diversas funciones en el plano cartesiano según su regla de correspondencia.
- Determina el dominio y el rango de distintas funciones.
- Identifica los elementos de una progresión aritmética y geométrica.

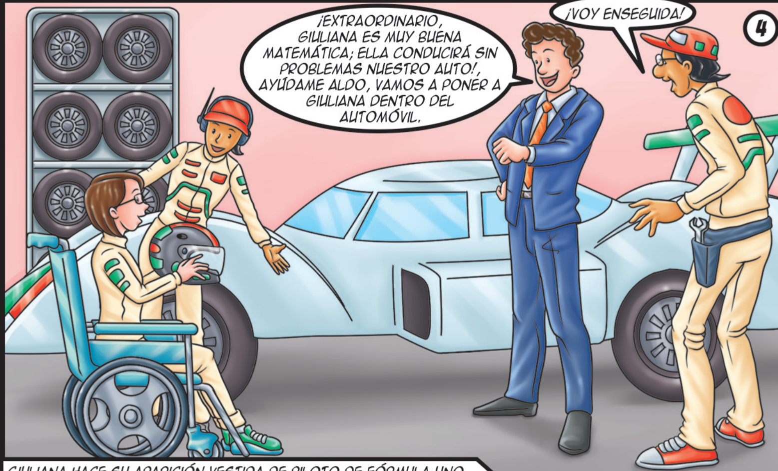


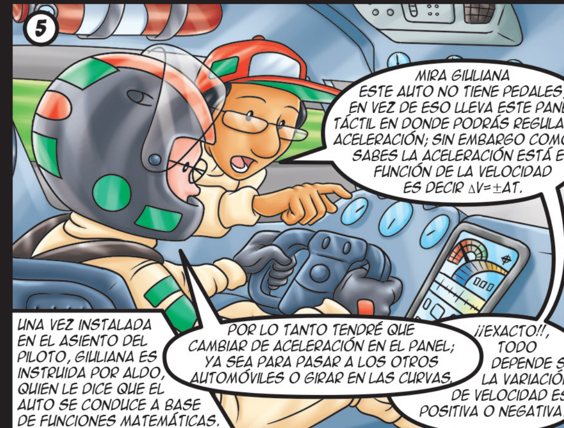
EQUIPO DE CARRERAS INTELECTUM

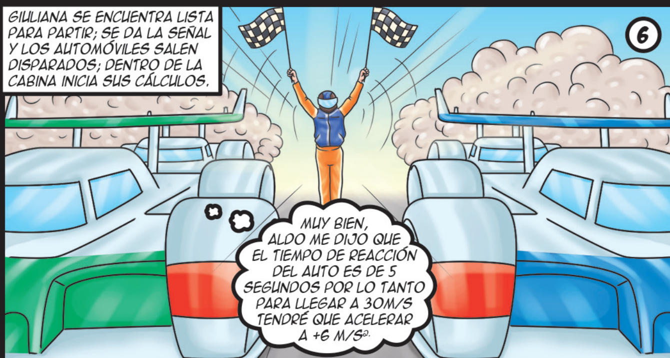


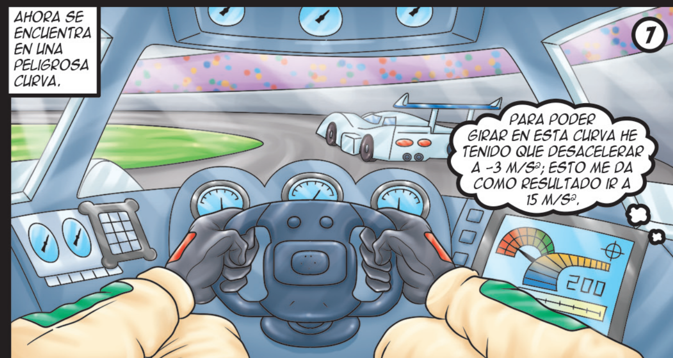






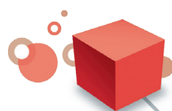








INTELECTUM



UNIDAD 1

TEORÍA DE EXPONENTES

POTENCIACIÓN

La potenciación es aquella operación matemática que consiste en multiplicar un número llamado base tantas veces como lo indica otro número llamado exponente.

Base → $b^n = p$ ← Potencia (n: Exponente)

EXPONENTE NATURAL

$$b^n = \underbrace{b \,.\, b \,...\, b \,.\, b}_{n \text{ veces}} \quad ; \; b \in \mathbb{R};\; n \in \mathbb{N};\; n > 0$$

Exponente cero:

$$a^0 = 1 \;;\; a \neq 0$$

Ejemplos:

1. $7^0 = 1$
2. $(-2)^0 = 1$
3. $\left(\frac{1}{7}\right)^0 = 1$
4. $\left(-\frac{1}{4}\right)^0 = 1$

Exponente negativo:

$$a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x} \;;\; a \neq 0$$

Ejemplos:

1. $4^{-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{1}{4}$
2. $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{\frac{3}{2}}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

TEOREMAS

Teorema 1: Multiplicación de bases iguales

$$a^x \,.\, a^y = a^{x+y}$$

Ejemplos:

1. $x^2 \,.\, x^3 \,.\, x^5 = x^{2+3+5} = x^{10}$
2. $b^{3+x} \,.\, b^{-2x} \,.\, b^{x+1} = b^{3+x-2x+x+1} = b^4$

Teorema 2: Potencia de potencia

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

Ejemplos:

1. $(x^3)^4 = x^{3\,.\,4} = x^{12}$
2. $((a^2)^5)^3 = a^{2\,.\,5\,.\,3} = a^{30}$
3. $(b^{10})^{\frac{1}{5}} = b^{10 \cdot \frac{1}{5}} = b^2$

Teorema 3: Potenciación de una multiplicación

$$(a \,.\, b)^x = a^x \,.\, b^x$$

Ejemplos:

1. $(a^2 . b)^3 = a^6 \,.\, b^3$
2. $(a^4 . b^5)^x = a^{4x} \,.\, b^{5x}$

Teorema 4: División de bases iguales

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \;;\; a \neq 0$$

Ejemplos:

1. $\frac{x^{10}}{x^3} = x^{10-3} = x^7$
2. $a^{x-2} = \frac{a^x}{a^2}$

Teorema 5: Potenciación de una división

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \;;\; b \neq 0$$

Ejemplos:

1. $\left(\frac{x}{3}\right)^2 = \frac{x^2}{3^2} = \frac{x^2}{9}$
2. $\left(\frac{x^3}{y^4}\right)^5 = \frac{(x^3)^5}{(y^4)^5} = \frac{x^{15}}{y^{20}}$

Teorema 6: Exponentes sucesivos

$$a^{b^{c^{d^e}}} = a^{b^{c^f}} = a^{b^g} = a^h \qquad (d^e = f;\; c^f = g;\; b^g = h)$$

Ejemplos:

1. $9^{2^{-1}} = 9^{\frac{1}{2}} = \left(3^2\right)^{\frac{1}{2}} = 3$
2. $4^{2^{1^3}} = 4^{2^1} = 4^2 = 16$
3. $8^{2^{1^0}} = 8^{2^1} = 8^2 = 64$

Atención

Veamos algunos ejemplos:

$2^{5} = \underbrace{2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2}_{5 \text{ veces}} = 32$

$\underbrace{5 \,.\, 5 \,...\, 5 \,.\, 5}_{30 \text{ veces}} = 5^{30}$

$\underbrace{m \,.\, m \,...\, m \,.\, m}_{18 \text{ veces}} = m^{18}$



Nota

Ley de signos para el caso de la potenciación:

$\underbrace{(+)}_{\text{Base positiva}}^{par} = \underbrace{+}_{\text{Potencia positiva}}$

$(+2)^4 = (+2)(+2)(+2)(+2) = 16$ (Exponente par; Base positiva; Potencia positiva)

$\underbrace{(-)}_{\text{Base negativa}}^{par} = \underbrace{+}_{\text{Potencia positiva}}$

$(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$ (Exponente par; Base negativa; Potencia positiva)

$\underbrace{(+)}_{\text{Base positiva}}^{impar} = \underbrace{+}_{\text{Potencia positiva}}$

$(+4)^3 = (+4)(+4)(+4) = 64$ (Exponente impar; Base positiva; Potencia positiva)

$\underbrace{(-)}_{\text{Base negativa}}^{impar} = \underbrace{-}_{\text{Potencia negativa}}$

$(-5)^3 = (-5)(-5)(-5) = -125$ (Exponente impar; Base negativa; Potencia negativa)

Recuerda

Ten presente la ley de signos para la radicación:

$\sqrt[\text{impar}]{+} = +$

Ejemplos:
$\sqrt[3]{+8} = +2$ $\sqrt[5]{+32} = +2$

$\sqrt[\text{impar}]{-} = -$

Ejemplos:
$\sqrt[3]{-1} = -1$ $\sqrt[3]{-27} = -3$

$\sqrt[\text{par}]{+} = +$

Ejemplos:
$\sqrt{+100} = +10$ $\sqrt[4]{+16} = +2$

Simplificación directa de los radicales.

- $\sqrt[7]{a^7} = a$
- $\sqrt[p+1]{9^{p(p+1)}} = 9^p$
- $\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{5^3 . 2} = \sqrt[3]{5^3} . \sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2}$

Para colocar un número dentro de un radical: Se multiplica el índice con el exponente del número:

Ejemplo

$10\sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{10^6 . 3} = \sqrt[6]{3.10^6}$

$2^3\sqrt[7]{9} = \sqrt[7]{2^{3.7} . 9} = \sqrt[7]{9.2^{21}}$



La suma de un número limitado de sumandos se expresará de la siguiente manera:

- 2 sumandos: $\underbrace{2+2}_{2 \text{ veces}} = 2(2)$
- 3 sumandos: $\underbrace{7+7+7}_{3 \text{ veces}} = 3(7)$
- n sumandos: $\underbrace{x+x+...+x}_{n \text{ veces}} = n(x)$

Otros casos:

- $\underbrace{xy + xy + xy + ... + xy}_{\text{"z" veces}} = z(xy) = xyz$
- $\underbrace{a^{2010} + a^{2010} + ... + a^{2010}}_{2010 \text{ veces}} = 2010a^{2010}$

RADICACIÓN

La radicación es aquella operación matemática en la cual, dados dos números llamados cantidad subradical e índice, se requiere encontrar otro número llamado raíz.

Índice → $\sqrt[n]{b} = a$ ← Raíz

↑ Cantidad subradical

Ejemplos:

1. $\sqrt{25} = 5 \Rightarrow 25 = 5^2$
2. $\sqrt[3]{8} = 2 \Rightarrow 8 = 2^3$
3. $\sqrt[4]{81} = 3 \Rightarrow 81 = 3^4$
4. $\sqrt[5]{-32} = -2 \Rightarrow -32 = (-2)^5$

Exponente fraccionario

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$a \in \mathbb{R}$; m; n $\in \mathbb{Z}^+ \wedge n \geq 2$

Ejemplos:

1. $5^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{5^3}$
2. $x^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{x^4}$

Raíz de raíz

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

Ejemplos:

1. $\sqrt[3]{\sqrt[5]{x}} = \sqrt[15]{x}$
2. $\sqrt[4]{\sqrt[m]{a^3}} = \sqrt[4m]{a^3}$

Raíz de un producto

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b}$$

Ejemplos:

1. $\sqrt{a^3.b.c^5} = \sqrt{a^3} . \sqrt{b} . \sqrt{c^5}$
2. $\sqrt[5]{8mn^3} = \sqrt[5]{8} . \sqrt[5]{m} . \sqrt[5]{n^3}$

Raíz de una fracción

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} ;\ b \neq 0$$

Ejemplos:

1. $\sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$
2. $\sqrt[3]{\frac{x}{6}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{6}}$

EFECTUAR

1. Expresa $4^3 \times 8^2 \times 16^4$ como una potencia de 2. ¿Cuál es el exponente final de 2?
2. Expresa $3^4 . 9^3 . 27^5$ como una potencia de 3 e indicar el exponente final obtenido.
3. Expresa $6 . 6^2 . 12^3 . 18^5$ como producto de potencias de 2 y 3. Indicar la suma de exponentes de 2 y 3.
4. Reduce: $\dfrac{4^4 . 6^6 . 8^8}{16^5 . 12^6}$
5. Calcula: $\dfrac{(2^4 + 3 \times 2^3)^3}{2^5 + 3^5 + 15^2}$
6. Calcula: $\dfrac{4^{3^2}}{2^{2^4}}$
7. Reduce: $\left(\dfrac{1}{3^2}\right)^{-2} + \left(\dfrac{1}{4^2}\right)^{-2}$
8. Evalua: $12(3^{-1} + 2^{-1})$
9. Calcula: $(-2)^3 + (-2)^{3^2} - (-2)^{2^3}$
10. Calcula: $\dfrac{2^{3^2}}{2^{2^2}}$
11. Simplifica: $\left(\dfrac{2}{4^{-3}}\right)^2 \left(\dfrac{4}{2^{-4}}\right)^{-2}$
12. Calcula: $\left(\dfrac{2^{-3}}{4^{-2}}\right)^{-5}$
13. Evalua: $\left(\dfrac{8^{-4}}{16^{-5}}\right)\left(\dfrac{4^3}{2^{10}}\right)$
14. Calcula: $\dfrac{2^{3^2} . 2^{2^3}}{2^{4^2}}$



Problemas resueltos

1 Halla el valor de: $M = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{2}}$

Resolución:

Aplicamos la propiedad del exponente negativo:

$M = [(3)^3 + (3)^2]^{\frac{1}{2}} = [27 + 9]^{\frac{1}{2}} = 36^{\frac{1}{2}}$

$M = \sqrt{36}$

$\therefore M = 6$

2 Calcula: $S = 27^{3^{-1}} + \sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{8}\right)^{-2}}$

Resolución:

$S = 27^{\left(\frac{1}{3}\right)} + \sqrt{\left(\frac{10}{1}\right)^2 - \left(\frac{8}{1}\right)^2}$

$S = \sqrt[3]{27} + \sqrt{100 - 64}$

$S = 3 + \sqrt{36}$

$\therefore S = 9$

3 Calcula: $M = 5^{2^{2009^0}} + 2014^{5^0} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

Resolución:

$M = 5^{2^1} + 2014^1 + \left(\frac{2}{1}\right)^3$

$M = 5^2 + 2014 + 8$

$M = 25 + 2014 + 8$

$\therefore M = 2047$

4 Calcula: $A = \sqrt{\frac{5 \,.\, 4^{n-1}}{2^{2n-2} + 4^{n-2}}}$

Resolución:

Expresamos en función de una base común:

$A = \sqrt{\frac{5 \,.\, 2^{2n-2}}{2^{2n-2} + 2^{2n-4}}}$

Extraemos factor común 2^{2n} en el numerador y denominador del radicando:

$A = \sqrt{\frac{2^{2n} \,.\, 5 \,.\, 2^{-2}}{2^{2n}(2^{-2} + 2^{-4})}}$

Operamos adecuadamente:

$$A = \sqrt{\frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}}} = \sqrt{\frac{\frac{5}{4}}{\frac{4}{16} + \frac{1}{16}}} = \sqrt{\frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{16}}} = \sqrt{\frac{5 \,.\, 16}{4 \,.\, 5}}$$

$\therefore \; A = 2$

5 De las proposiciones determina cuáles son verdaderas:

i) $\sqrt[\sqrt{5}]{5^{\frac{\sqrt{5}}{5}}} = 5$ ii) $\sqrt[\sqrt{2}]{2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}} = 4^{\frac{1}{4}}$ iii) $\sqrt[\sqrt{2}]{2^{\frac{2}{\sqrt{2}}}} = 2$

Resolución:

Usamos la propiedad del exponente fraccionario:

i) $\sqrt[\sqrt{5}]{5^{\frac{\sqrt{5}}{5}}} = 5^{\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{5}}} = 5^{\frac{1}{5}}$ (F)

ii) $\sqrt[\sqrt{2}]{2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}} = 2^{\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} = 2^{\frac{1}{2}} = \left(2^{2 \cdot \frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{4}}$ (V)

iii) $\sqrt[\sqrt{2}]{2^{\frac{2}{\sqrt{2}}}} = 2^{\frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{2}}} = 2^{\frac{2}{2}} = 2$ (V)

$\therefore$ Son verdaderas ii y iii.

6 Ordena de forma decreciente.

$A = 1^{2^{3^4}}$ $B = 2^{3^{1^4}}$ $C = 3^{1^{4^2}}$ $D = 4^{3^{2^1}}$ $A = 4^{1^{3^2}}$

Resolución:

Recuerda que en estos casos de exponentes sucesivos para su reducción se toman los números de dos en dos de arriba hacia abajo.

$A = 1^{2^{3^4}} = 1$

$B = 2^{3^{1^4}} = 2^{3^1} = 2^3 = 8$

$C = 3^{1^{4^2}} = 3^{1^{16}} = 3^1 = 3$

$D = 4^{3^{2^1}} = 4^{3^2} = 4^9$

$E = 4^{1^{3^2}} = 4^{1^9} = 4^1 = 4$

Luego, en orden decreciente será: DBECA.

7 Reduce:

$W = (0{,}1)^{-1}\,(0{,}3)(0{,}5)^{-2}\,(0{,}25)^{\frac{1}{2}}$

Resolución:

Expresamos en fracciones las bases:

$W = \left(\frac{1}{10}\right)^{-1}\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{5}{10}\right)^{-2}\left(\frac{5^2}{10^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

Usamos la propiedad del exponente negativo: $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$

$W = 10 \,.\, 3 \,.\, 10^{-1}\,(5 \,.\, 10^{-1})^{-2}\,(5^2 .\, 10^{-2})^{\frac{1}{2}}$

Usamos la propiedad de potencia:

$W = 3 \,.\, 10 \,.\, 10^{-1} \,.\, 5^{-2} \,.\, 10^2 \,.\, 5^1 \,.\, 10^{-1}$

A bases iguales los exponentes se suman:

$W = 3 \,.\, 5^{-2+1} \,.\, 10^{1-1+2-1}$

$W = \frac{3.10}{5} = 6$

$\therefore W = 6$

ECUACIÓN EXPONENCIAL

Nota

En la ley de semejanza o analogía se pueden presentar los casos:

- $x^{x^{b}} = a^{a^{b}} \Rightarrow x = a$
- $x^{x+1} = b^{b+1} \Rightarrow x = b$
- $x^{(x+1)^{x}} = \left(\frac{1}{b}\right)^{\left(\frac{1}{b}+1\right)^{\frac{1}{b}}} \Rightarrow x = \frac{1}{b}$

Ejemplos de aplicación de las ecuaciones exponenciales:

Bases iguales

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = \frac{8}{27}$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3}$$
$$\boxed{x = 3}$$

Exponentes iguales

$$3^{a+1} = 7^{a+1}$$
$$a + 1 = 0$$
$$\boxed{a = -1}$$

Analogía o semejanza

$$b^{b} = 256$$
$$b^{b} = 4^{4}$$
$$\boxed{b = 4}$$

ECUACIONES EXPONENCIALES

Son aquellas ecuaciones que presentan a la(s) incógnita(s) en el exponente o en la base. Para resolver una ecuación exponencial debes tener presente los siguientes casos:

I. Ley de bases iguales

Si en una igualdad de dos potencias las bases son iguales, entonces sus exponentes también serán iguales. Así:

$\boxed{\text{Si: } x^{a} = x^{b} \Rightarrow a = b}$; $x > 0$; $x \neq 1$

II. Ley de exponentes iguales

Si en una igualdad de dos potencias los exponentes son iguales, entonces sus bases también serán iguales. Así:

$\boxed{\text{Si: } x^{a} = y^{a} \Rightarrow x = y}$; $a \neq 0$

También:

$\boxed{\text{Si: } a \neq b \neq 0 \text{ y } a^{x} = b^{x} \Rightarrow x = 0}$

III. Ley de semejanza o analogía

$\boxed{\text{Si: } x^{x} = a^{a} \Rightarrow x = a}$; $x \neq 0; 1$

ECUACIONES LINEALES

Casos a presentarse en el transcurso de la resolución de una ecuación exponencial.

Caso I

Ecuación lineal de la forma:

$$\boxed{\frac{x}{a} \pm \frac{b}{a} = c}$$

Cuya solución es:

$$\boxed{x = ac \mp b}$$

Ejemplos:

1. $\frac{x}{3} - \frac{5}{3} = 1$

   $x = 3(1) + 5$

   $\therefore\ x = 8$

2. $\frac{n}{5} + \frac{1}{5} = 12$

   $n = 5(12) - 1$

   $\therefore\ n = 59$

Caso II

Ecuación lineal de la forma:

$$\boxed{\frac{ax \pm b}{c} \pm \frac{dx \pm e}{f} = \frac{gx \pm h}{k}}$$

Ejemplo: $\frac{x+1}{4} + \frac{2x-1}{3} = \frac{5x+1}{6}$

- Multiplicamos en aspa:
$$\frac{3(x+1) + 4(2x-1)}{4.3} = \frac{5x+1}{6}$$
- Multiplicamos las constantes 3 y 4 con cada término y simplificamos denominadores:
$$\frac{3x + 3 + 8x - 4}{2} = 5x + 1$$
- Reducimos términos semejantes:

  $11x - 1 = 2(5x + 1)$

  $11x - 1 = 10x + 2$

  $\therefore\ x = 3$

EFECTUAR

Halla x en cada caso:

1. $2^{x} = 16$
2. $3^{x} = 27$
3. $5^{x} = 125$
4. $7^{x} = 49$
5. $6^{x} = 216$
6. $5^{x} = 625$
7. $2^{x} = 64$
8. $7^{x} = 343$
9. $3^{x} = 81$
10. $2^{x} = 128$
11. $9^{x} = 27$
12. $27^{x} = 9$
13. $4^{x} = 32$
14. $25^{x} = 125$
15. $36^{x} = 216$
16. $27^{x} = 81$
17. $49^{x} = 343$
18. $81^{x} = 27$
19. $125^{x} = 3125$
20. $216^{x} = 36$
21. $x^{3} = 216$
22. $x^{5} = 32$
23. $(x - 1)^{3} = 27$
24. $(2x - 3)^{3} = 8$
25. $3^{x-1} = 5^{x-1}$
26. $7^{x+4} = 13^{x+4}$
27. $x^{x} = 4$
28. $x^{x} = 3125$
29. $(x - 1)^{(x-1)} = 27$
30. $(2x - 8)^{(2x-8)} = 256$
31. $8^{x-1} = 32$
32. $16^{x-2} = 32$



Problemas resueltos

1 Halla n.
$7^{n+3} + 7^{n} = 16\,856$

Resolución:

$$7^{n+3} + 7^{n} = 16\,856$$
$$7^{n} \cdot 7^{3} + 7^{n} \cdot 1 = 16\,856$$
$$7^{n}(7^{3} + 1) = 16\,856$$
$$\Rightarrow 7^{n} \cdot 344 = 16\,856 \Rightarrow 7^{n} = 49 \qquad \therefore\ n = 2$$

2 Halla n.
$4^{n+2} = 16^{n-1}$

Resolución:

$$4^{n+2} = 16^{n-1}$$
$$(2^{2})^{n+2} = (2^{4})^{n-1} \Rightarrow 2^{2n+4} = 2^{4n-4}$$
$$\Rightarrow 2n + 4 = 4n - 4$$
$$8 = 2n \qquad \therefore\ n = 4$$

3 Calcula x.
$B^{3^{2x+1}} = B^{27^{x-1}}$

Resolución:

$$B^{3^{2x+1}} = B^{27^{x-1}} \Rightarrow 3^{2x+1} = 27^{x-1}$$
$$\Rightarrow 3^{2x+1} = (3^{3})^{x-1}$$
$$\Rightarrow 2x + 1 = 3(x-1)$$
$$2x + 1 = 3x - 3$$
$$\therefore\ x = 4$$

4 Halla x.
$\sqrt[3]{\dfrac{11^{8} + 11^{x}}{11^{x} + 11^{2}}} = 11$

Resolución:

$$\frac{11^{8} + 11^{x}}{11^{x} + 11^{2}} = 11^{3} \Rightarrow 11^{8} + 11^{x} = 11^{3}(11^{x} + 11^{2})$$
$$11^{8} + 11^{x} = 11^{x+3} + 11^{5}$$
$$11^{8} - 11^{5} = 11^{x+3} - 11^{x}$$
$$11^{5}(11^{3} - 1) = 11^{x}(11^{3} - 1)$$
$$11^{5} = 11^{x}$$
$$\therefore\ x = 5$$

5 Resuelve: $\sqrt[7]{a^{x-3}} = a^{2}$

Resolución:

$$a^{\frac{x-3}{7}} = a^{2} \Rightarrow \frac{x-3}{7} = 2$$
$$x - 3 = 14 \qquad \therefore\ x = 17$$

6 Halla n.
$3^{n+3} + 3^{n} = 756$

Resolución:

$$3^{n} \cdot 3^{3} + 3^{n} \cdot 1 = 756$$
$$3^{n}(3^{3} + 1) = 756$$
$$3^{n} \cdot 28 = 756$$
$$3^{n} = \frac{756}{28}$$
$$3^{n} = 27 = 3^{3}$$
$$\therefore\ n = 3$$

7 Calcula n.
$2^{3^{n-1}} = 512$

Resolución:

$$2^{3^{n-1}} = 512 = 2^{9}$$
$$3^{n-1} = 9 = 3^{2}$$
$$n - 1 = 2$$
$$\therefore n = 3$$

8 Calcula x.
$4^{\frac{x-1}{3}} = 5^{\frac{x-1}{3}}$

Resolución:

$$4^{\frac{x-1}{3}} = 5^{\frac{x-1}{3}}$$

Como $(4 \neq 5)$; según la ley de exponentes iguales:

$$\frac{x-1}{3} = 0$$
$$x - 1 = 0$$
$$\therefore x = 1$$

9 Resuelve:
$25^{x+2} = 125^{3}$

Resolución:

$$5^{2(x+2)} = 5^{9} \Rightarrow 2(x+2) = 9 \Rightarrow 2x = 5$$
$$\therefore x = \frac{5}{2}$$

10 Determina el valor de x:
$x^{x} = 256$

Resolución:

$$x^{x} = 256 = 4^{4}$$

Según la ley de semejanza o analogía:

$x = 4$

Recuerda

A las cantidades desconocidas se les llama variables, incógnitas o indeterminadas y se representan por letras (las últimas del alfabeto):

....w; x; y; z.



EXPRESIÓN ALGEBRAICA

Conjunto de números y letras relacionados entre sí por los operadores matemáticos de la adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y/o radicación, en un número limitado de veces.

Ejemplos:

1. $R(x; y; z) = 33x^3 + 5xyz^2 + 21yz^3$
2. $S(x; y) = 2x + \frac{1}{y} + 7$
3. $T(x; y) = 21\sqrt[3]{y} + \frac{1}{y^2} + 4x^2z$

CLASES DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1. Por su forma o naturaleza

Expresión algebraica racional: es aquella que luego de ser reducida o simplificada la expresión, todas las variables en el numerador tienen exponentes enteros.

Expresión algebraica racional entera: sus exponentes de las variables son números naturales ($\mathbb{N}$).

Ejemplo:

- $P(x; y; z) = 24x^2 + \frac{3}{y^{-2}} + \frac{121x^3 - 21y}{z^{-3}} + 20 \Rightarrow P(x; y; z) = 24x^2 + 3y^2 + (121x^3 - 21y)z^3 + 20$

Expresión algebraica racional fraccionaria: cuando por lo menos una de sus variables tiene exponente entero negativo ($\mathbb{Z}^-$) en el numerador.

Ejemplo:

- $T(x) = x^{20} + \frac{1}{5}x^3 + 2zx^{-2}$
- $Z(x; y) = \frac{10}{x^2} + 2x^3y^{-2} + \frac{1}{xy} \Rightarrow Z(x; y) = 10x^{-2} + 2x^3y^{-2} + x^{-1}y^{-1}$

Observación

Antes de clasificar a una expresión algebraica, es necesario simplificarla.



Expresión algebraica irracional: cuando por lo menos una de sus variables tiene exponente fraccionario o signo radical.

Ejemplo:

- $A(x) = x^3 + 10x + \sqrt[7]{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^{-\frac{1}{2}}} \Rightarrow A(x) = x^3 + 10x + \sqrt[7]{x^2} + x^{-2} + \sqrt{x}$

Atención

Exponente fraccionario

$R(x,y) = x^{\frac{1}{3}}y^{30}$

$\Rightarrow$ R(x,y): no es un monomio; es un término algebraíco.

2. Por su número de términos

Monomio (1 término): es aquella expresión algebraica racional en la que las únicas operaciones que aparecen entre las variables son el producto y la potencia de exponente natural.

Ejemplos:

- $P(x; y) = x^2y^{10}$
- $T(x) = \frac{1}{5}x^3$
- $S(x; y; z) = 2xy^2z^3$

POLINOMIO

Es una expresión algebraica racional entera, de dos o más términos.
Forma general (respecto a una sola variable):

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

Donde: $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$: coeficientes
$a_0 \neq 0$: coeficiente principal
a_n: término independiente (coefciente final)

n: grado del polinomio ($n \in \mathbb{Z}^+$)
x: variable

Nota

Todo polinomio de acuerdo a su número de términos recibe el nombre particular de:

- 1 término: $21x^2y^3$ (monomio)
- 2 términos: $9x^7 - 35xyz$ (Binomio)
- 3 términos: $3x^2 - 7xy^2 + 100$ (Trinomio)
- 4 términos: $6x^3 - 3x^2 + x - 7$ (Cuatrinomio)
- 5 términos: (Quintinomio)
- 6 términos: (Sextinomio)
- n términos: (Polinomio)

NOTACIÓN POLINOMIAL

Se utiliza para indicar a las variables de un polinomio.

Ejemplos:

- $P(x) = \frac{4}{3}x^4 + 2x^2 + \frac{1}{3}$
  Se lee: P de x o polinomio P de variable x.
- $T(x,y) = 21x^2y^3 + 3y^2 + 3x^2y^7$
  Se lee: T de x e y o polinomio T de variables x e y.



GRADO DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Esto es característica de las expresiones algebraicas enteras (exponentes de las variables enteras y positivas, $\mathbb{Z}^+$).

Tipos de grados

Grado relativo (GR): referido a una letra o variable de una expresión algebraica.

Grado absoluto (GA): referido a todas las letras o variables de una expresión algebraica.

Recuerda

Grado, es el exponente de las variables, más no así el exponente de las constantes o parámetros.



GRADO DE UN MONOMIO

Grado relativo

Respecto a una variable, es el exponente de dicha variable.

Así:

$M(x; y; z) = a^2x^2y^{10}z^{20}$

$\Rightarrow$ GR(x) = 2 ; GR(y) = 10 ; GR(z) = 20

Grado absoluto

Está dado por la suma de los grados relativos de las variables.

Así:

$M(x; y) = \frac{3}{7}x^7y^2 \Rightarrow GA(M) = GR(x) + GR(y) = 7 + 2 = 9$

Recuerda

GR(x) : grado relativo respecto a la variable x.

GA(M): grado absoluto del monomio M.

GRADO DE UN POLINOMIO

Grado relativo

Respecto a una variable, está dado por el mayor exponente de dicha variable en el polinomio.

Sea:

$P(x; y) = x^5y^{30} + 2x^4y^{10} + 14x^{20}y$

$\Rightarrow$ GR(x) = 20; GR(y) = 30

Grado absoluto

Es el término de mayor grado absoluto.

Sea:

$P(x; y; z) = \underbrace{3xyz^{10}}_{GA = 12} + \underbrace{x^8y^2z^5}_{GA = 15} + \frac{1}{3}\underbrace{xy^2z}_{GA = 4} \Rightarrow GA(P) = 15$

Atención

El grado de una constante siempre es cero:

$Z(x) = 2^{2^2} \Rightarrow GA(Z) = 0$



VALOR NUMÉRICO

Es el resultado que se obtiene al reemplazar las variables de una expresión algebraica por valores determinados.

Ejemplo:

$P(x; y; z) = x^2 + 10x^3yz + xy^2z^3$. Hallar: P(1; 2; 3) $\Rightarrow$ $P(1; 2; 3) = (1)^2 + 10(1)^3(2)(3) + (1)(2)^2(3)^3 = 1 + 60 + 4(27)$

$\therefore P(1; 2; 3) = 169$

CAMBIO DE VARIABLE

Asi como las variables pueden reemplazarse por números, también pueden ser reemplazadas por otros polinomios.

Caso I:

Ejemplo:

Si: $P(x + 3) = 4x^3 + 2x + 1$

Determina P(4)

Resolución:

Resolvemos la ecuación:

$x + 3 = 4 \Rightarrow x = 1$

Reemplazamos:

$P(1 + 3) = P(4) = 4(1)^3 + 2(1) + 1$

$\therefore P(4) = 7$

Caso II:

Ejemplo:

Si: $P(x) = 2x + 11$

Calcula: $P(x + 7)$

Resolución:

Reemplazamos x por x + 7 en P(x):

$P(x) = 2x + 11$

$P(x + 7) = 2(x + 7) + 11$

$= 2x + 14 + 11$

$\therefore P(x + 7) = 2x + 25$

Caso III:

Ejemplo:

Si: $P(x + 3) = 3x + 4$

Determina: $P(2x - 5)$

Resolución:

Se reemplaza x + 3 por 2x – 5 previa preparación del polinomio:

$P(x + 3) = 3(x + 3 - 3) + 4$

$\Rightarrow P(2x - 5) = 3(2x - 5 - 3) + 4$

$= 6x - 20$

También:

$x + 3 = 2x - 5 \Rightarrow x = 2x - 8$

$\Rightarrow P(2x + 5) = 3(2x - 8) + 4 = 6x - 20$

POLINOMIOS ESPECIALES

Es un caso particular de aquellos polinomios que tienen ciertas características que se diferencian de los demás, pueden ser por los exponentes de sus variables o por la ubicación de los términos.

Atención

Ten en cuenta siempre las siguientes propiedades del grado absoluto (GA):

1. Si: $P(x) = (ax^m + b)(cx^n + d)$

   $GA(P) = m + n$

2. Si: $H(x) = \dfrac{10x^a + 8}{12x^b + 2}$

   $GA(H) = a - b$

3. Si: $G(x) = (9x^m + 1)^n$

   $GA(G) = m \cdot n$

4. Si: $P(x) = \sqrt[a]{5x^b + 6}$

   $GA(P) = \dfrac{b}{a}$



Atención

Ten presente los valores numéricos notables:

Sea el polinomio: P(x)

Suma de coeficientes:

Σ Coef. (P) = P(1)

Término independiente:

TI (P) = P(0)

1. Polinomio homogéneo

Este polinomio tiene como característica que los grados absolutos de todos sus términos son iguales.

Ejemplo:

$M(x; y; z) = \underbrace{2x^3yz^5}_{GA=9} + \underbrace{3z^9}_{GA=9} - \underbrace{21x^5y^4}_{GA=9} + \underbrace{xyz^7}_{GA=9}$

El grado de homogeneidad de M es 9.

2. Polinomios idénticos

Dos polinomios son idénticos si tienen el mismo valor numérico para cualquier valor asignado a sus variables. En dos polinomios idénticos del mismo grado los coeficientes de sus términos semejantes son iguales.

Sea: $ax^2 + bx + c = mx^2 + nx + p \Rightarrow$ $\boxed{a = m;\ b = n;\ c = p}$

Ejemplo:

Sea: $10x^2 - 7xy^2 + cxy = -ax^2 + bxy^2 - xy$, calcula: $a + b + c$

Se cumple: $a = -10$; $b = -7$; $c = -1 \Rightarrow a + b + c = -18$

3. Polinomio idénticamente nulo

Es aquel que se anula para cualquier valor de sus variables. En todo polinomio idénticamente nulo reducido, sus coeficientes son iguales a cero.

Si: $ax^2 + bx + c \equiv 0 \Rightarrow$ $\boxed{a = 0;\ b = 0;\ c = 0}$

Ejemplo:

Si el polinomio: $P(x; y) = (a + 2)x^2y + (b - 1)xz + (c - 7)xy$ es idénticamente nulo. Halla: $\frac{a}{bc}$

Resolución:

Si el polinomio es nulo, entonces: $a = -2$; $b = 1$; $c = 7$

Luego: $\frac{a}{bc} = \frac{-2}{(1)(7)} = -\frac{2}{7}$ $\therefore \frac{a}{bc} = -\frac{2}{7}$

Nota

Si se tiene un polinomio completo en una variable el número de términos es equivalente al grado aumentado en la unidad.

Si: P(x) es completo

$\Rightarrow$ N.º términos (P) = Grado + 1

Ejemplo:

$P(x) = x^{16} + x^{15} + ... + x^2 + x + 1$

GA(P) = 16

$\Rightarrow$ N.º términos (P) = 16 + 1 = 17

4. Polinomio completo

Un polinomio será completo con respecto a una variable, si dicha variable posee todo los exponentes, desde el mayor hasta el exponente cero, inclusive.

Ejemplo:

$P(x) = 2x^3 + x^2 + x^{④} - 2x + 6x^{⓪} \Rightarrow$ P(x) es completo. (④: Mayor; ⓪: Menor)

5. Polinomio ordenado

Un polinomio será ordenado con respecto a una variable si los exponentes de dicha variable están aumentando o disminuyendo a partir del primer término.

Ejemplo:

$P(x) = x^8 + x^5 - 2x^4 + 5x - 2$

Es un polinomio ordenado descendentemente (los exponentes de x disminuyen a partir del primer término).

EFECTUAR

Grupo I

Halla la adición en cada caso.

1. $3x^2 + x + -1 + -5x + x^2 + -6$
2. $5x^3 + x - 6 + x^2 + 3x - x^2 + 5x^3 - 1 + x + x^3 + 5$
3. $3ab + -6b + -7 + -5ab - 8 + 7b + 6ab + 18b + -6$
4. $0{,}6x^7 + -6{,}5x^3 + x + -10 + 7{,}2x^7 + 3{,}2x + 15 + -3{,}4x^3 + 6{,}2x^7 + -8$
5. $16mn^2 + -m^2n + 8 + -15m^2n + -6mn^2 + -10 + -7mn^2 + -m^2n + 15$

Grupo II

Halla la sustracción en cada caso.

1. $5\sqrt{7}m^{10} - (-6\sqrt{7}m^{10})$
2. $0{,}73xy^2 - \frac{1}{2}xy^2$
3. $mn3 - \left(-\frac{7}{2}\right)mn^3$
4. $0{,}5\ xyz - (-0{,}78xyz)$
5. $3\sqrt{7}abc^2 - (-8\sqrt{7}abc^2)$

Problemas resueltos



1 Sea R un polinomio que verifica:
$R(3x+2) = 9x^2 + 6x + k + 10$
Donde el término independiente de R(x) es 12.
Halla: R(5)

Resolución:
El término independiente se calcula cuando:

$3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

$TI(R) = R(0) = 9\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 6\left(-\frac{2}{3}\right) + k + 10 = 12$

$\Rightarrow k = 2$

Si: $x = 1$

$\therefore\ R(5) = 9(1)^2 + 6(1) + 2 + 10 = 27$

2 Dado el polinomio cuyo grado de homogeneidad es 31:
$Z(x, y) = ax^{4a+3b+2}y^a + bx^{4a+3b+1}y^{a+1} + (a^{-b} + b^{-b})x^{a+5b+35}y^{4a-2b-33}$
Además, el grado relativo a "x" es al grado relativo de "y" como 4 es a 1. Determina la suma de sus coeficientes.

Resolución:
Por ser un polinomio homogéneo se cumple:

$5a + 3b + 2 = 31$ (dato)

$5a + 3b = 29$ ...(1)

Por condición del problema:

$\frac{GR(x)}{GR(y)} = \frac{4}{1} \Rightarrow \frac{a+5b+35}{a+1} = \frac{4}{1} \Rightarrow 3a - 5b = 31$ ...(2)

De (1) multiplicamos miembro a miembro por 5:

$25a + 15b = 145$ ...(3)

De (2) multiplicamos miembro a miembro por 3:

$9a - 15b = 93$ ...(4)

Sumamos miembro a miembro (3) y (4):

$(25a + 15b) + (9a - 15b) = 145 + 93$

$34a = 238$

$a = 7$

Reemplazamos el valor de "a" en (1):

$5(7) + 3b = 29$

$b = -2$

Nos piden:

$\sum Coef. = a + b + [a^{-b} + b^{-b}] = 7 - 2 + 7^{-(-2)} + (-2)^{-(-2)}$

$= 5 + 49 + 4 = 58$

$\therefore \sum Coef. = 58$

3 Se presenta el siguiente polinomio completo:
$M(x) = 3 - 2x^{p-10} + 7x^{p-9} + 6x^{p-8} + px^{p-7}$
Calcula: $(\sum coef. - 23)^2$

Resolución:
Del polinomio completo, notamos el aumento sucesivo de sus exponentes, empezando por el uno:

$p - 10 = 1 \Rightarrow p = 11$

La suma de coeficientes está dado por:

$\sum Coef.\ (M) = M(1) = 3 - 2 + 7 + 6 + p = 25$

Nos piden:

$(\sum Coef. - 23)^2 = (25 - 23)^2 = 2^2 = 4$

$\therefore\ (\sum Coef. - 23)^2 = 4$

4 Del polinomio idénticamente nulo:
$K(x; y) = (a+b)x^3y^4 - (b-a)x^4y^3 - 30x^3y^4 - 10x^4y^3$
Determina: $\left(\frac{a}{b}\right)^b$

Resolución:
Agrupamos adecuadamente los términos semejantes:

$K(x; y) = [(a+b)x^3y^4 - 30x^3y^4] - [(b-a)x^4y^3 + 10x^4y^3]$

$K(x; y) = (a + b - 30)x^3y^4 - (b - a + 10)x^4y^3$

Según condición del problema:

$K(x,y) = 0$

$(a + b - 30)x^3y^4 - (b - a + 10)\,x^4y^3 = 0$

Se cumple que:

$a + b - 30 = 0$

$b - a + 10 = 0$

$a = 20 \wedge b = 10$

Nos piden:

$\left(\frac{a}{b}\right)^b = \left(\frac{20}{10}\right)^{10} = 2^{10} = 1024$

$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^b = 1024$

5 Calcula (mn) sabiendo que el polinomio es homogéneo.
$P(x; y) = 6x^my^6 + \sqrt{3}\,x^{10}y^4 - 2x^3y^{2+n}$

Resolución:

$m + 6 = 14 = 3 + 2 + n$

$\Rightarrow m = 8 \wedge n = 9$

$\therefore\ mn = 72$

6 Sea el monomio:

$M = x^2y^5(x^2y)^2(x^my)^n$

Si el GR(x) = 10 y el GA(M) = 19, halla: m^n

Resolución:

$M = x^2y^5(x^2y)^2(x^my)^n$

$M = x^2y^5x^4y^2x^{mn}y^n$

$M = x^{2+4+mn}y^{5+2+n}$

$M = x^{6+mn}y^{7+n}$

$GR(x) = 6 + mn = 10 \Rightarrow mn = 4$

$GA(M) = 6 + mn + 7 + n = 19$

$GA(M) = 6 + 4 + 7 + n = 19 \Rightarrow n = 2 \wedge m = 2$

Piden: $m^n = 2^2 = 4$

7 Halla **m** si el monomio es de quinto grado.

$M = x^2x^{2m}x^{3m}$

Resolución:

$M = x^2x^{2m}x^{3m} = x^{2+5m}$

Del dato: $2 + 5m = 5 \Rightarrow m = \frac{3}{5}$

8 Si: $P(x) = x^{2001} - 3x^{2000} + 1$

Halla: P(3)

Resolución:

$P(x) = x^{2001} - 3x^{2000} + 1$

Para:

$x = 3 \Rightarrow P(3) = 3^{2001} - 3 \times 3^{2000} + 1$

$P(3) = 3^{2001} - 3^{2001} + 1 = 1$

9 Si se cumple: P(a) = a ; P(a – b) = b; P(a – c) = c

Además: P(x) = P(x – b) + P(x – c) – 2P(P(2x – a))

Calcula **a** en términos de **b** y **c.**

Resolución:

Datos:

P(a) = a; P(a – b) = b; P(a – c) = c

Además:

P(x) = P(x – b) + P(x – c) – 2P(P(2x – a))

Sea: x = a

$P(a) = \underbrace{P(a-b)}_{b} + \underbrace{P(a-c)}_{c} - 2P(\underbrace{P(a)}_{a})$

$3P(a) = b + c \Rightarrow a = \frac{b+c}{3}$

10 Si: F(x) = nx + 5

Halla $\frac{m}{n}$ si se verifica:

F(x) + F(2x) + F(3x) = 30x + m

Resolución:

F(x) = nx + 5

F(2x) = 2xn + 5

F(3x) = 3xn + 5

Reemplazamos:

nx + 5 + 2nx + 5 + 3nx + 5 = 30x + m

6nx + 15 = 30x + m

De donde: $6n = 30 \Rightarrow n = 5$

Además: m = 15

$\therefore \frac{m}{n} = \frac{15}{5} = 3$

11 Halla (m – n) si el polinomio P es de grado absoluto 20 y de grado relativo a y igual a 8.

$P(x; y) = 4x^{m+1}y^{n-2} + 6x^{m+2}y^{n-1} + 6x^{m+3}y^{n-2}$

Resolución:

Del polinomio:

$P(x; y) = \underbrace{4x^{m+1}y^{n-2}}_{} + \underbrace{6x^{m+2}y^{n-1}}_{} + \underbrace{6x^{m+3}y^{n-2}}_{}$

GA = m + n – 1	GA = m + n + 1	GA = m + n + 1
GR(y) = n – 2	GR(y) = n – 1	GR(y) = n – 2

El mayor GA: m + n + 1 = 20

m + n = 19 ...(1)

Además el mayor $GR(y) = n - 1 = 8 \Rightarrow n = 9$

Reemplazamos en (1):

$m + n = 19 \Rightarrow m + 9 = 19$

$\Rightarrow m = 10$

Por tanto: m – n = 1

12 Sea: $P(x) = (a + 3)x^a + 3x + 5$

un polinomio cúbico; calcula su coeficiente principal.

Resolución:

$P(x) = (a + 3)x^a + 3x + 5$

Por dato, P(x) es de grado 3:

$\Rightarrow a = 3$

Nos piden coeficiente principal de P(x): a + 3

Entonces: 3 + 3 = 6

PRODUCTOS NOTABLES

CONCEPTO

Son resultados de ciertas multiplicaciones indicadas que se obtienen en forma directa sin necesidad de aplicar la propiedad distributiva; todo ello es posible por la forma en que se presentan los factores. Es importante para el alumno reconocer estas formas matemáticas, para lograr ello le proporcionaremos un resumen completo de los llamados productos notables.

PRINCIPALES PRODUCTOS NOTABLES

1. Binomio suma o diferencia al cuadrado

$$(a+b)^2 = \underbrace{a^2 + 2ab + b^2}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}}$$

$$(a-b)^2 = \underbrace{a^2 - 2ab + b^2}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}}$$

Ejemplo:

- $(\sqrt{2}+1)^2 = (\sqrt{2})^2 + 2(\sqrt{2})(1) + 1^2$
  $= 2 + 2\sqrt{2} + 1 = 3 + 2\sqrt{2}$

Ejemplo:

- $(2a-1)^2 = (2a)^2 - 2(2a)(1) + 1^2$
  $= 4a^2 - 4a + 1$

2. Identidades de Legendre

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

Ejemplo:

- $(x+3m)^2 + (x-3m)^2 = 2(x^2+(3m)^2) = 2(x^2+9m^2)$

Ejemplo:

- $(3m+2n)^2 - (3m-2n)^2 = 4(3m)(2n) = 24mn$

3. Diferencia de cuadrados

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Ejemplos:

- $(x^2+1)(x^2-1) = (x^2)^2 - 1^2 = x^4 - 1$
- $(\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-2) = (\sqrt{7})^2 - 2^2$
  $= 7 - 4 = 3$
- $(5n+3m)(5n-3m) = (5n)^2 - (3m)^2 = 25n^2 - 9m^2$

4. Identidad de Stevin (producto de binomios con un término común)

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

Ejemplos:

- $(x+7)(x+1) = x^2 + (7+1)x + (7)(1) = x^2 + 8x + 7$
- $(x-2)(x+5) = x^2 + (-2+5)x + (-2)5 = x^2 + 3x - 10$

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc$$

Ejemplo:

- $(x+2)(x+1)(x+7) = x^3 + (2+1+7)x^2 + (2(1)+2(7)+1(7))x + 2(1)(7)$
  $= x^3 + 10x^2 + 23x + 14$

5. Desarrollo de un binomio al cubo

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Ejemplo:

- $(2x+2)^3 = 8x^3 + 24x^2 + 24x + 8$

Ejemplo:

- $(a-2)^3 = a^3 - 6a^2 + 12a - 8$

Corolario:

$$(a+b)^3 + (a-b)^3 = 2a(a^2+3b^2)$$

$$(a+b)^3 - (a-b)^3 = 2b(3a^2+b^2)$$

Observación

$(a-b)^2 = (b-a)^2$



Atención

Como:
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ...(α)
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ...(β)
(α) + (β):
$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$
(α) − (β):
$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$
De este modo se demostró la veracidad de las identidades de Legendre.



Atención

Como:
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ...(i)
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ ...(ii)
(i) + (ii):
$(a+b)^3 + (a-b)^3 = 2a(a^2+3b^2)$
(i) − (ii):
$(a+b)^3 - (a-b)^3 = 2b(3a^2+b^2)$

De este modo se demuestra el corolario del desarrollo de un binomio al cubo.



> **Recuerda**
> Que a la identidad de la Cauchy también se le denomina: forma semiagrupada de un binomio al cubo.

6. Identidades de Cauchy

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

Ejemplo:
- $(2x + m)^3 = (2x)^3 + m^3 + 3(2x)(m)(2x + m)$
  $= 8x^3 + m^3 + 6xm(2x + m)$

Ejemplo:
- $(a^2 - b)^3 = (a^2)^3 - b^3 - 3(a^2)(b)(a^2 - b)$
  $= a^6 - b^3 - 3a^2b(a^2 - b)$

7. Producto de un binomio por un trinomio

Suma de cubos

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

Ejemplo:
- $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = x^3 + 2^3 = x^3 + 8$

Diferencia de cubos

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

Ejemplo:
- $(\sqrt{7} - 2)(\sqrt{7}^2 + \sqrt{7}(2) + 2^2) = (\sqrt{7})^3 - 2^3 = 7\sqrt{7} - 8$

8. Desarrollo de un trinomio al cuadrado
- Forma desarrollada
  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
- Formas abreviadas
  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$
  $(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab - bc - ca)$
  $(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(-ab + ac - bc)$
  $(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + ac - bc)$

9. Identidad de Argand

$(x^{2m} + x^my^n + y^{2n})(x^{2m} - x^my^n + y^{2n}) =$
$x^{4m} + x^{2m}y^{2n} + y^{4n}$

- **Casos particulares**
  $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^4 + x^2 + 1$
  $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) = x^4 + x^2y^2 + y^4$

EFECTUAR

1. $(x - 3)^2 =$
2. $(x + 8)^2 =$
3. $(x + 9)^2 =$
4. $(5 - x)^2 =$
5. $(8 - x)^2 =$
6. $(x + 2)^3 =$
7. $(x + 3)^3 =$
8. $(x + 4)^3 =$
9. $(x - 6)^3 =$
10. $(x + 10)(x - 10) =$
11. $(x + 2)(x - 2) =$
12. $(a + 5)(a - 5) =$
13. $(\sqrt{3} + 1)^2 =$
14. $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 =$
15. $(\sqrt{7} + 2)^2 =$
16. $(\sqrt{13} + 1)^2 =$
17. $(\sqrt{2} - 1)^2 =$
18. $(x + 9)^2 - x^2 =$
19. $(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1) =$
20. $(5 + \sqrt{13})(5 - \sqrt{13}) =$
21. $(x + 8)(x + 2) =$
22. $(x + 2)(x + 3) =$
23. $(x + 9)(x - 6) =$
24. $(x + 10)(x - 2) =$
25. $(x + 12)(x - 8) =$
26. $(x + 2 - y)^2 =$
27. $(a - 2 + 3)^2 =$
28. $(x^2 + b + 1)(x^2 - b + 1) =$
29. $(5y + 2x - 1)^2 =$
30. $(b^2 + b + 1)(b^2 - b + 1) =$
31. $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) =$
32. $(x + xy + y)^2 =$
33. $(x^6 + x^3y^4 + y^8)(x^6 - x^3y^4 + y^8) =$

Problemas resueltos

1 Si: $x + y = 3\sqrt{2}$

$x \cdot y = 2$

Calcula: $x^2 + y^2$

Resolución:

$(x + y)^2 = (3\sqrt{2})^2$

$x^2 + 2xy + y^2 = 18$

$x^2 + 4 + y^2 = 18$

$\therefore x^2 + y^2 = 14$

2 Calcula: $a^3 + b^3$

Si: $a + b = 4$ y $a \cdot b = 2$

Resolución:

$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\underbrace{(a + b)}_{4}$

$4^3 = a^3 + b^3 + 3 \cdot 2 \cdot 4$

$64 = a^3 + b^3 + 24$

$\therefore a^3 + b^3 = 40$

3 Si: $x = \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1$

$y = \sqrt[3]{3} - 1$

Halla: xy

Resolución:

$y \cdot x = \underbrace{(\sqrt[3]{3} - 1)(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1)}_{(\sqrt[3]{3})^3 - (1)^3}$

$y \cdot x = 3 - 1$

$\therefore xy = 2$

4 Si: $x + y = 2\sqrt{5}$

$x \cdot y = 3$

Halla: $M = \sqrt{x^2 + y^2 + 2}$

Resolución:

$(x + y)^2 = (2\sqrt{5})^2$

$x^2 + \underbrace{2x \cdot y}_{6} + y^2 = 20$

$x^2 + 6 + y^2 = 20$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 14$

$\therefore M = \sqrt{14 + 2} = 4$

5 Si: $a = \sqrt{5} - \sqrt[3]{2} + 1$

$b = \sqrt[3]{2} - 4$

$c = 3 - \sqrt{5}$

Calcula: $E = \dfrac{a^3 + b^3 + c^3}{6abc}$

Resolución:

$a + b + c = (\sqrt{5} - \sqrt[3]{2} + 1) + (\sqrt[3]{2} - 4) + (3 - \sqrt{5})$

$a + b + c = 0$

$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Reemplazamos:

$E = \dfrac{3abc}{6abc} = \dfrac{3}{6}$

$\therefore E = \dfrac{1}{2} = 0,5$

6 Reduce:

$M = (x + 5)^2 + (x + 3)^2 - 2(x + 4)^2 + 1$

Resolución:

$M = (x + 5)^2 + (x + 3)^2 - 2(x + 4)^2 + 1$

$M = x^2 + 10x + 25 + x^2 + 6x + 9 - 2(x^2 + 8x + 16) + 1$

$M = 2x^2 + 16x + 34 - 2x^2 - 16x - 32 + 1$

$M = 34 - 32 + 1$

$\therefore M = 3$

7 Si: $x + \dfrac{1}{x} = 11$

Calcula: $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

Resolución:

$\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = (11)^2$

$x^2 + 2x\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{x^2} = 121$

$x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2} = 121$

$\therefore x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 119$

8 Si: $x^3 + y^3 = 28$

$xy(x + y) = 12$

Calcula: $x + y$

Resolución:

$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

$(x + y)^3 = 28 + 3(12)$

$(x + y)^3 = 64$

$\therefore x + y = 4$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Recuerda

Propiedades generales de los polinomios.

Sea:
D°: Grado del dividendo
d°: Grado del divisor
Q°: Grado del cociente

$R°_{máx.}$: grado máximo del residuo

Luego:
- $Q° = D° - d°$
- $R°_{máx.} = d° - 1$



CONCEPTO

Operación definida para polinomios de una variable cuya finalidad es obtener el cociente y el residuo a partir del dividendo y el divisor.

Identidad fundamental:

$$D(x) = d(x)Q(x) + R(x)$$

Elementos:
D(x) : dividendo
d(x) : divisor
Q(x): cociente
R(x): resto o residuo

TÉCNICAS DE DIVISIÓN

Horner

Empleado para la división de polinómios de cualquier grado (incluso: $D°(x) < d°(x)$).

Ubicación de los COEFICIENTES en el esquema:

NO cambia de signo el 1.er coef.	D	D I V I D E N D O	
Cambian de signo por (–1)	I V I S O R	↑ El número de espacios son iguales ←	# lugares = d°(x) ←
		COCIENTE	RESTO

IMPORTANTE:
- Los polinomios deben estar ordenados en forma descendente respecto a una sola variable y si faltase alguna completar con ceros.
- Si existen dos o más variables, asumir sólo a una de ellas como tal, y las demás harán el papel de números o constantes.

Observación

- En el ejemplo, la segunda raya vertical se traza contando dos espacios desde la derecha, pues el divisor es de segundo grado.
- Se debe colocar un cero en el término x^3 del dividendo, ya que éste no aparece.



Ejemplo:

Dividir: $\dfrac{4x^5a^5 + 32x^4a^4 + 16x^2a^2 + xa + 9}{2x^2a^2 + 4xa + 3}$

Resolución:
- Completamos con ceros el término cúbico y asumiendo como variable a x:

$$\frac{4x^5a^5 + 32x^4a^4 + 0x^3a^3 + 16x^2a^2 + xa + 9}{2x^2a^2 + 4xa + 3}$$

- Disponemos de los coeficientes:

		:	$24a^4$	$-54a^3$	$88a^2$		
	$2a^2$	$4a^5$	$32a^4$	$0a^3$	$16a^2$	a	9
$2a^3$ ×	$-4a$		$-8a^4$	$-6a^3$			
$2a^3$ ×	-3			$-48a^3$	$-36a^2$		
					$108a^2$	$81a$	
						$-176a$	-132
		$2a^3$	$12a^2$	$-27a$	44	$-94a$	-123
		x^3	x^2	x	TI	x	TI



Por lo tanto:
$Q(x,a) = 2x^3a^3 + 12x^2a^2 - 27xa + 44$
$R(x,a) = -94xa - 123$

Ruffini

Se emplea cuando el divisor toma la forma:

$$ax \pm b \quad o \quad ax^n \pm b$$

Si el divisor es de la forma: $ax^n \pm b$, hacemos el siguiente cambio: $x^n = y$

Esquema de resolución:

DIVISOR	D I V I D E N D O	
$ax \pm b = 0$ $x = \mp \frac{b}{a}$	↓	
Primer coef. del divisor: a	Coeficientes del cociente alterado	RESIDUO
	Verdaderos coeficientes luego de dividir por "a".	

Ejemplo:

Efectúa: $\dfrac{12x^9 + 16x^6 + 9x^3 + 12}{3x^3 + 4}$ y verifica si es exacta.

Resolución:

- Según el cambio recomendado: $x^3 = y$
- Expresamos el dividendo en función de x^3: $D(x) = 12(x^3)^3 + 16(x^3)^2 + 9(x^3) + 12$
- Reemplazamos el cambio de variable:

$$\frac{12y^3 + 16y^2 + 9y^3 + 12}{3y + 4}$$

$3y + 4 = 0$	12	16	9	12
$y = -\frac{4}{3}$	↓	−16	0	−12
:3	12	0	9	0
	4	0	3	
	y^2	y	TI	

Luego: $Q(y) = 4y^2 + 3$
Como: $y = x^3$ entonces: $Q(x) = 4(x^3)^2 + 3$ $\therefore$ $Q(x) = 4x^6 + 3$
$R(x) = 0$ (división exacta)

Teorema del resto

Nos ayuda a obtener el resto de una división sin desarrollarla.

Enunciado de Descartes:

$$\text{Sea: } \frac{P(x)}{ax \pm b} \text{ una división polinómica} \Rightarrow R = P\left(\mp\frac{b}{a}\right)$$

Regla práctica:

1. El divisor igualamos a cero: $ax \pm b = 0$
2. Despejar la variable: $x = \mp\frac{b}{a}$

Observación

- Cuando las potencias de la variable del dividendo son múltiplos de la potencia de la variable del divisor binomio, se podrá aplicar el cambio de variable.
- El cociente será un polinomio en el cual sus potencias irán disminuyendo de acuerdo al exponente del divisor.



Si: $ax^n \pm b = 0 \Rightarrow x^n = \mp\frac{b}{a}$

No extraer raíces

3. Reemplazamos el valor de **x** o $\mathbf{x}^n$ en el polinomio (dividendo) y el valor obtenido es el RESIDUO de la división.

Ejemplo:

Calcula el resto de: $\frac{x^{16} - 6x^8 - 12x^4 + 9}{x^4 - 3}$

Regla práctica:

1. Divisor igual a cero: $x^4 - 3 = 0$
2. Despejamos x^4 tenemos: $x^4 = 3$
3. Reemplazamos en el dividendo; previamente hacemos:
   $D(x) = (x^4)^4 - 6(x^4)^2 - 12(x^4) + 9$

Luego:

$R(x) = 3^4 - 6(3)^2 - 12(3) + 9 = 81 - 54 - 36 + 9 = 0$

$\therefore$ R(x) = 0 (división exacta)

Recuerda

A. Para determinar la suma de coeficientes de un polinomio entero en **x**: P(x) se hace:

Σ coef.P(x) = P(1)

B. Para determinar el término independiente de dicho polinomio se hace:

TI = P(0)



DIVISIBILIDAD

Se dice que un polinomio P(x) es divisible por otro polinomio d(x) si y solo si la división P(x) : d(x) es exacta, es decir, el resto es cero (R(x) = 0) ; además, se establece que d(x) es un factor o divisor de P(x).

$$P(x) \text{ es divisible por } d(x) \Leftrightarrow P(x) = d(x)Q(x)$$

Ejemplo:

$(x^3 - a^3)$ es divisible por $(x - a)$, ya que: $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + xa + a^2)$

Teoremas

I. Si un polinomio P(x) se anula para x = a (P(a) = 0) $\Rightarrow$ P(x) es divisible por (x – a).

Además: x = a es un cero o raíz de P(x).

$$P(x) = (x - a)Q(x)$$

Ejemplo:

$P(x) = x^3 + 2x^2 - 3$ se anula para x = 1.

$P(1) = (1)^3 + 2(1)^2 - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$

$\Rightarrow$ P(x) es divisible por (x – 1).

$\therefore$ P(x) = (x – 1)Q(x)



II. Si un polinomio P(x) es divisible por separado por los binomios (x–a), (x–b) y (x–c); entonces será divisible por el producto de ellos, es decir:

Si:

$P(x) = (x - a)Q_1(x) \Rightarrow R(x) = 0$

$P(x) = (x - b)Q_2(x) \Rightarrow R(x) = 0$

$P(x) = (x - c)Q_3(x) \Rightarrow R(x) = 0$

$$\Rightarrow P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)Q(x) \wedge R(x) = 0$$

Atención

El proceso inverso también se cumple, osea si un polinomio P(x) es divisible por el producto (x + a)(x + b)(x + c) entonces, P(x) es divisible por cada uno de sus factores.

Problemas resueltos



HORNER

1 Calcula a/b si el resto de la división:

$$\frac{6x^4 - x^3 + ax - b}{3x^2 + x - 4}$$

Es: $4 - 5x$

Resolución:

- Completamos el término cuadrático con cero:

3	6	–1	0	a	–b
–1		–2	8		
+4			1	–4	
				–3	12
	2	–1	3	a – 7	12 – b
				x	TI

$Q^o = D^o - d^o$
$= 4 - 2$
$Q^o = 2$

$R^o_{máx.} = d^o - 1$
$= 2 - 1$

$R^o_{máx.} = 1$

- El resto de la división se expresa como:
  $R(x) = (a - 7)x + (12 - b)$
- Por dato: $R(x) = -5x + 4$
- Comparamos los términos lineales y las ctes:
  $R(x) = (a - 7)x + (12 - b) = -5x + 4$
  $a - 7 = -5 \quad \wedge \quad 12 - b = 4$
  $a = 2 \quad \wedge \quad b = 8$

Luego: $\frac{a}{b} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{1}{4}$

2 Efectúa:

$$\frac{12a^4 - 23a^3b + 51a^2b^2 - 30ab^3 + 20b^4}{4a^2 - 5ab + 7b^2}$$

e indica el cociente y el resto.

Resolución:

- Según las propiedades; respecto a la letra "a":
  $Q^o(a) = D^o(a) - d^o(a) = 4 - 2 = 2$
  $R^o_{máx.} = d^o(a) - 1 = 2 - 1 = 1$
- Como esta completo y ordenado respecto a la letra "a":

4	12	–23b	$51b^2$	$-30b^3$	$20b^4$
+5b		15b	$-21b^2$	⊕	⊕
$-7b^2$			$-10b^2$	$14b^3$	
				$25b^3$	$-35b^4$
	3	–2b	$5b^2$	$9b^3$	$-15b^4$
	a^2	a	TI	a	TI

Luego:
$Q(a, b) = 3a^2 - 2ab + 5b^2$
$R(a, b) = 9ab^3 - 15b^4$

RUFFINI

3 Calcula la suma de coeficientes del cociente de la siguiente división:

$$\frac{8x^6 + 6x^5 + 3x^4 + 4x^2 - x + 2}{x - \frac{1}{2}}$$

Resolución:

- Completando el dividendo, luego por Ruffini:

$x - \frac{1}{2} = 0$	8	6	3	0	4	–1	2
$x = \frac{1}{2}$	↓	4	5	4	2	3	1
	8	10	8	4	6	2	3

El coeficiente de "x" en el divisor es "1", luego los coeficientes del cociente quedan como estan indicados.

ΣCoef. $Q(x) = 8 + 10 + 8 + 4 + 6 + 2 = 38$

$\therefore \Sigma$Coef. $Q(x) = 38$

4 Luego de dividir:

$$\frac{8x^4 + 2x^2 - 3}{2x^2 - 1}$$

Calcula la suma de coeficientes del cociente.

Resolución:

- Hacemos: $x^2 = y \Rightarrow \frac{8(x^2)^2 + 2(x^2) - 3}{2(x^2) - 1}$

  Obtenemos: $\frac{8y^2 + 2y - 3}{2y - 1}$

- Por Ruffini:

$2y - 1 = 0$	8	2	–3
$y = \frac{1}{2}$		4	3
: 2	8	6	0
	4	3	
	y	TI	

- Cociente: $Q(y) = 4y + 3$
- Reponiendo: $y = x^2$: $Q(x) = 4x^2 + 3$

Nos piden:

ΣCoef. Q(x) = 4 + 3 = 7

$\therefore$ ΣCoef. Q(x) = 7

TEOREMA DEL RESTO

5 Calcula "a" en la siguiente división exacta:

$$\frac{x^{18} - 2x^9 - 3x^6 + x^3 + a}{x^3 - 1}$$

Resolución:



- Según la regla práctica:
  1. Divisor igual a cero: $x^3 - 1 = 0$
  2. Despejar la variable: $x^3 = 1$
  3. Reemplazamos el valor de "x^3" en el polinomio dividendo, para ello expresamos:

$D(x) = (x^3)^6 - 2(x^3)^3 - 3(x^3)^2 + (x^3) + a$

$R(x) = (1)^6 - 2(1)^3 - 3(1)^2 + 1 + a$

$= 1 - 2 - 3 + 1 + a = a - 3$

- Una división es exacta cuando R(x) = 0.

$R(x) = a - 3 = 0$

$\therefore a = 3$

6 Calcula "n", si el resto de la división:

$$\frac{x^{2^{2n}} - 2}{x^{2^n} - 4}$$ es 14.

Resolución:

- La regla práctica nos dice:
  1. Divisor igual a cero: $x^{2^n} - 4 = 0$
  2. Despejar el término: $x^{2^n} = 4 \Rightarrow x = 4^{\frac{1}{2^n}}$
  3. Reemplazamos, en el dividendo:

$R(x) = (x)^{2^{2n}} - 2$

$= \left(4^{\frac{1}{2^n}}\right)^{2^{2n}} - 2$

- Recordamos teoría de exponentes: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Bases iguales, restar exponentes

$R(x) = 4^{\frac{2^{2n}}{2^n}} - 2$

$= 4^{2^{2n-n}} - 2 = 4^{2^n} - 2 = (2^2)^{2^n} - 2$

$R(x) = 2^{2 \cdot 2^n} - 2 = 2^{2^{n+1}} - 2$

- Por dato: R(x) = 14

a sumar el 2.° miembro

$R(x) = 2^{2^{n+1}} - 2 = 14$

- Por transposición de términos: $2^{2^{n+1}} = 16$

$2^{2^{n+1}} = 2^4$ — a bases iguales igualarse exponentes

$2^{n+1} = 4$

$2^{n+1} = 2^2$

$n + 1 = 2$ $\therefore n = 1$



DIVISIBILIDAD

7 Sea "P" un polinomio en x, divisible por $(x^3 - 25x + 42)$. ¿Cuál será el residuo al dividir P(x) entre (x – 2)?

Resolución:

- Por teorema se cumple:
  $P(x) = (x^3 - 25x + 42)Q_1(x) \Rightarrow R(x) = 0$ ...(1)
- Del problema:
  $P(x) = (x - 2)Q_2(x) + R(x)$ ...(2)
- Ambas expresiones (1) y (2) conforman el polinomio P(x), luego para: x = 2

  En (1): $P(2) = (2^3 - 25(2) + 42)Q_1(x) = 0$ ...(3)

  En (2): $P(2) = (2 - 2)Q_2(x) + R(x) = R(x)$ ...(4)

  Observemos de (3) y (4) :
  $\therefore R(x) = 0$

8 Un polinomio P(x) de cuarto grado es divisible separadamente entre $(x^2 + 1)$ y $(x^2 + 2x + 2)$. Si se divide P(x) entre $(x^3 - 1)$ el resto es:
$6x^2 + 6x + 8$, luego el término independiente del polinomio es:

Resolución:

- Por teorema:

$$\underbrace{P(x)}_{4.^\circ\text{ grado}} = \underbrace{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)}_{4.^\circ\text{ grado}} \cdot \underbrace{\overbrace{Q_1(x)}^{k}}_{\text{grado } 0} \quad ...(1)$$

- Además:
  $P(x) = (x^3 - 1)Q_2(x) + (6x^2 + 6x + 8)$ ...(2)
- Para : x = 1

  En (1) : $P(1) = (1^2 + 1)(1^2 + 2(1) + 2) \cdot k$

  $P(1) = 2(5)k = 10k$ ...(3)

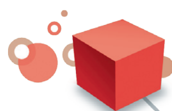
  En (2) : $P(1) = (1^3 - 1)Q_2(x) + 6(1)^2 + 6(1) + 8$

  $P(1) = 20$ ...(4)
- De (3) y (4) : $P(1) = 10k = 20$

  $\Rightarrow k = 2$
- Con este valor el polinomio P(x) toma la forma:
  En (1): $P(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)^2$
- De aqui calculamos el término independiente TI cuando x = 0:

  $TI = P(0) = (0^2 + 1)(0^2 + 1)(0^2 + 2(0) + 2)^2$

  $\therefore TI = 4$



UNIDAD 2

COCIENTES NOTABLES

CONCEPTO

Toman este nombre porque su cálculo se realiza en forma directa, sin necesidad de efectuar la división polinómica.

Representación general:

$$\boxed{\frac{x^n \pm a^n}{x \pm a}}$$ Siendo: x; a, las bases
$n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$

Atención

Para que sea un cociente notable (CN):

- El resto debe ser nulo (división exacta).
- Las bases deben ser iguales.
- Los exponentes en el dividendo, deben ser iguales.

$$\frac{x^{(n)} \pm a^{(n)}}{x \pm a}$$



CASOS A ESTUDIAR

Caso I: $\boxed{\frac{x^n - a^n}{x - a}}$

Verificamos si la división es exacta por el teorema del resto.

Regla práctica:

1. Divisor igual a cero: $x - a = 0$
2. Despejamos la variable: $x = a$
3. Reemplazamos en el dividendo: $R(x) = a^n - a^n = 0$

$$\boxed{\text{Si: } R(x) = 0, \text{ entonces es un cociente notable; } n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}}$$

Obtenemos su desarrollo general por Ruffini:

$x - a = 0$	1	0	0	...	0	0	$-a^n$
$x = a$	↓	a	a^2	...	a^{n-2}	a^{n-1}	a^n
	1	a	a^2	...	a^{n-2}	a^{n-1}	0 → División exacta
	x^{n-1}	x^{n-2}	x^{n-3}		x	TI	

Luego: $$\boxed{\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + ... + xa^{n-2} + a^{n-1}}$$

Observa que:
Si el divisor es de la forma x – a, los signos de los términos serán positivos.

$\frac{-}{-} = + + + + ... + +$ (n: par o impar)

Ejemplo:

$$\frac{x^3 - a^3}{x - a} = x^2 + xa + a^2$$

También se verifica el proceso inverso, veamos algunos ejemplos:

- $a + b = \frac{a^2 - b^2}{a - b}$
- $x + 7 = \frac{x^2 - 7^2}{x - 7} = \frac{x^2 - 49}{x - 7}$
- $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = \frac{x^4 - y^4}{x - y}$
- $x^3 + 2x^2 + 4x + 8$

  Dándole una forma adecuada:

  $x^3 + x^2(2) + x(2)^2 + 2^3 = \frac{x^4 - 2^4}{x - 2} = \frac{x^4 - 16}{x - 2}$

Observación

Si $\frac{x^p \pm y^r}{x^q \pm y^s}$ es CN:

$\Rightarrow \boxed{\frac{p}{q} = \frac{r}{s} = n}$ n: (n.º de términos)

$\Rightarrow \boxed{R(x) = 0}$ R(x): residuo



Observación

En el desarrollo de:

$\dfrac{x^n + a^n}{x + a} = + - + - ...$

Los términos de lugar **par son negativos** y los de lugar **impar son positivos**.

$\Rightarrow t_k = (+)$ si k impar.

$t_k = (-)$ si k par.

t_k: término de lugar k.



Atención

En: $\dfrac{x^n + a^n}{x + a}$; si n es par.

$\Rightarrow$ No es CN; $R(x) \neq 0$



Nota

En el caso III, si n es impar, la división no es un cociente notable, ya que el residuo es diferente de cero (0).



Caso II: $\dfrac{x^n + a^n}{x + a}$

Verificamos si la división es exacta por el teorema del resto.

Regla práctica:

1. Divisor igual a cero: $x + a = 0$
2. Despejamos la variable: $x = -a$
3. Reemplazamos en el dividendo: $R(x) = (-a)^n + a^n$

Para n = impar, si $R(x) = -a^n + a^n = 0$, entonces es un cociente notable; $n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$

Por Ruffini obtenemos su desarrollo general:

$x + a = 0$	1	0	0	0	....	0	0	a^n
$x = -a$	↓	$-a$	a^2	$-a^3$	...	$-a^{n-2}$	a^{n-1}	$-a^n$
	1	$-a$	a^2	$-a^3$		$-a^{n-2}$	a^{n-1}	0
	x^{n-1}	x^{n-2}	x^{n-3}	x^{n-4}		x	TI	↑ División exacta

Luego: $\dfrac{x^n + a^n}{x + a} = + x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - ... - xa^{n-2} + a^{n-1}$

Observa que:

Si el divisor es de la forma x + a, los signos de los términos $\dfrac{+}{+}$ son + − + − ... − + (n: impar)

Ejemplo:

$$\dfrac{x^5 + a^5}{x + a} = x^4 - x^3a + x^2a^2 - xa^3 + a^4$$

También se verifica el proceso inverso:

Ejemplos:

- $x^2 - 5x + 25 = x^2 - x(5) + (5)^2 = \dfrac{x^3 + 5^3}{x + 5}$

  $= \dfrac{x^3 + 125}{x + 5}$

- $x^6 - x^5a + x^4a^2 - x^3a^3 + x^2a^4 - xa^5 + a^6 = \dfrac{x^7 + a^7}{x + a}$

- $a^6 - 2a^5 + 4a^4 - 8a^3 + 16a^2 - 32a + 64$

  Dándole una forma adecuada:

  $a^6 - a^5(2) + a^4(2)^2 - a^3(2)^3 + a^2(2)^4 - a(2)^5 + (2)^6$

  $= \dfrac{a^7 + 2^7}{a + 2} = \dfrac{a^7 + 128}{a + 2}$

Caso III: $\dfrac{x^n - a^n}{x + a}$

Verificamos si la división es exacta por el teorema del resto.

Regla práctica:

1. Divisor igual a cero: $x + a = 0$
2. Despejamos la variable: $x = -a$
3. Reemplazamos en el dividendo: $R(x) = (-a)^n - a^n$

Para n = par, si $R(x) = a^n - a^n = 0$, entonces es un cociente notable; $n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$

Por Ruffini obtenemos su desarrollo general:

$x + a = 0$	1	0	0	...	0	0	$-a^n$
$x = -a$	↓	$-a$	a^2	...	a^{n-2}	$-a^{n-1}$	a^n
	1	$-a$	a^2	...	a^{n-2}	$-a^{n-1}$	0 ← División exacta
	x^{n-1}	x^{n-2}	x^{n-3}		x	TI	

Luego: $\dfrac{x^n - a^n}{x + a} = +x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - ... + xa^{n-2} - a^{n-1}$



Observa que:

Si el divisor es de la forma x + a, los signos de los términos $\frac{-}{+} = + - + - \ldots + -$ (n: par)

Ejemplo:

- $\dfrac{x^4 - a^4}{x + a} = x^3 - x^2a + xa^2 - a^3$

También verifica el proceso inverso:

- $a - b = \dfrac{a^2 - b^2}{a + b}$
- $x^5 - x^4a + x^3a^2 - x^2a^3 + xa^4 - a^5 = \dfrac{x^6 - a^6}{x + a}$

- $27z^3 - 9z^2 + 3z - 1 = (3z)^3 - (3z)^2(1) + (3z)(1)^2 - (1)^3$

  $27z^3 - 9z^2 + 3z - 1 = \dfrac{(3z)^4 - 1}{3z + 1} = \dfrac{81z^4 - 1}{3z + 1}$

Atención

En el desarrollo: $\dfrac{x^n - a^n}{x + a}$

Término de lugar par: (–)
Término de lugar impar: (+)



Caso IV: $\dfrac{x^n + a^n}{x - a}$

Verificamos si la división es exacta por el teorema del resto.

Regla práctica:

1. Divisor igual a cero: $x - a = 0$
2. Despejando la variable: $x = a$
3. Reemplazando en el dividendo: $R(x) = a^n + a^n$

> Si n = par o impar, el resto no se anula:
> $R(x) = a^n + a^n = 2a^n \neq 0$; no es cociente notable.

CÁLCULO DE UN TÉRMINO CUALQUIERA DE LUGAR "k" DEL COCIENTE NOTABLE

Veamos el desarrollo:

$$\frac{x^n \pm a^n}{x \pm a} = x^{n-1} \pm x^{n-2}a \pm x^{n-3}a^2 \pm \ldots \pm xa^{n-2} \pm a^{n-1}$$

$$= \underbrace{x^{n-1}a^0}_{t_1} \pm \underbrace{x^{n-2}a}_{t_2} \pm \underbrace{x^{n-3}a^2}_{t_3} \pm \underset{t_k}{\ldots} \pm \underbrace{xa^{n-2}}_{t_{n-1}} \pm \underbrace{x^0a^{n-1}}_{t_n}$$

Nota

Para aplicar la fórmula de t_k, la división debe tener la forma: $\dfrac{x^n \pm a^n}{x \pm a}$

El término de lugar k "t_k" toma la forma:

$$t_k = \pm x^{n-k}a^{k-1}$$ (Término general contando de izquierda a derecha)

Donde:

"k" es el lugar que ocupa el término, asimismo "x" y "a" son las bases del cociente notable, donde solo en el dividendo están afectadas por el exponente n.

Atención

Término general contando de derecha a izquierda:

$t_k = (\text{signo})x^{k-1}y^{n-k}$

El signo se analiza según el caso.

Convención para los signos:

- Si el divisor es $x - a \Rightarrow t_k = +$ (siempre)
- Si el divisor es x + a, entonces:

  Si k impar $\Rightarrow t_k = +$

  Si k par $\Rightarrow t_k = -$



Ejemplo:

Dado el cociente notable $\dfrac{x^5 + a^5}{x + a}$; halla t_4 y t_3.

Observamos que el divisor es x + a.
Nos piden:

- t_4, significa que k es par, entonces: $t_4 = -x^{5-4}a^{4-1}$

  $t_4 = -xa^3$
- t_3, significa que k es impar, entonces: $t_3 = +x^{5-3}a^{3-1}$

  $t_3 = +x^2a^2$

Problemas resueltos

1 Desarrolla e indica el 3.er término.

$$\frac{m^8 - y^{12}}{m^2 + y^3}$$

Resolución:

Buscamos bases así como exponentes iguales:

$$\frac{m^8 - y^{12}}{m^2 + y^3} = \frac{(m^2)^4 - (y^3)^4}{m^2 + y^3}$$

Verificamos si es cociente notable:

1. Divisor igual a cero: $m^2 + y^3 = 0$
2. Despejar la expresión: $m^2 = -y^3$
3. Reemplazamos en el dividendo: $R(m^2) = (-y^3)^4 - y^{12}$

Luego:
$R = 0 \Rightarrow$ Es cociente notable: caso III

El desarrollo de este cociente notable será:

$$\frac{(m^2)^4 - (y^3)^4}{m^2 + y^3} = (m^2)^{4-1} - (m^2)^{4-2}(y^3) + (m^2)^{4-3}(y^3)^2 - (y^3)^3$$

$= (m^2)^3 - (m^2)^2 (y^3) + (m^2) y^6 - y^9$

$= \underbrace{m^6}_{1.°} - \underbrace{m^4y^3}_{2.°} + \underbrace{m^2y^6}_{3.°} - \underbrace{y^9}_{4.°}$ (término)

$\therefore$ El 3.er término es $m^2 y^6$.

2 Si al efectuar:

$\dfrac{x^{16} + x^{14} + x^{12} + ... + x^4 + x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1}$, se obtiene una expresión de la forma $x^{2a} + x^a + b$

Calcula: $\sqrt[b+1]{a + b + 2}$

Resolución:

Empleando el proceso inverso de solución para un cociente notable:

$x^{16} + x^{14} + x^{12} + ... + x^4 + x^2 + 1$

Buscamos términos iguales a: x^2

$(x^2)^8 + (x^2)^7 + (x^2)^6 + ... + (x^2)^2 + (x^2)^1 + 1$

Los exponentes de "x^2" disminuyen de uno en uno, observa también que todos los términos son positivos: caso I de cocientes notables.

Por consiguiente:

$$(x^2)^8 + (x^2)^7 + (x^2)^6 + ... + (x^2)^2 + (x^2)^1 + 1 = \frac{(x^2)^9 - (1)^9}{x^2 - 1}$$

Son las bases

$$x^{16} + x^{14} + x^{12} + ... + x^4 + x^2 + 1 = \frac{x^{18} - 1}{x^2 - 1}$$

Haciendo lo mismo para el divisor:

$x^4 + x^2 + 1 = (x^2)^2 + (x^2)^1 + 1 = (x^2)^2 + (x^2)^1 (1)^1 + (1)^2$

bases

$$= \frac{(x^2)^3 - (1)^3}{x^2 - 1} = \frac{x^6 - 1}{x^2 - 1}$$

Reemplazamos en la expresión inicial:

$$\frac{x^{16} + x^{14} + x^{12} + ... + x^4 + x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} = \left[\frac{\frac{x^{18} - 1}{x^2 - 1}}{\frac{x^6 - 1}{x^2 - 1}}\right] = \frac{(x^{18} - 1)\cancel{(x^2 - 1)}}{(x^6 - 1)\cancel{(x^2 - 1)}}$$

$$= \frac{(x^6)^3 - 1^3}{x^6 - 1} = (x^6)^2 + (x^6)^1(1) + (1)^2 = x^{12} + x^6 + 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^{16} + x^{14} + x^{12} + ... + x^4 + x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} = x^{12} + x^6 + 1$$

Por dato del problema:

$x^{12} + x^6 + 1 = x^{2a} + x^a + b$

$x^{2(6)} + x^{(6)} + 1 = x^{2(a)} + x^{(a)} + b \Rightarrow a = 6; b = 1$

Nos piden calcular:

$\sqrt[b+1]{a + b + 2} = \sqrt[1+1]{6 + 1 + 2} = \sqrt{9} = 3$

3 Efectúa:

$$M = \frac{x^7 + 1}{x + 1} + \frac{x^7 - 1}{x - 1} - 2x^6 - 2x^4 - 2x^2$$

Resolución:

La primera fracción es el caso II y la segunda fracción es el caso I de cocientes notables; según su desarrollo establecemos:

(ten cuidado con los signos de los términos).

$M = (x^6 - x^5(1) + x^4(1)^2 - x^3(1)^3 + x^2(1)^4 - x(1)^5 + (1)^6)$
$\quad + (x^6 + x^5(1) + x^4(1)^2 + x^3(1)^3 + x^2(1)^4 + x(1)^5 + (1)^6)$
$\quad - 2x^6 - 2x^4 - 2x^2$

$M = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3$
$\quad + x^2 + x + 1 - 2x^6 - 2x^4 - 2x^2$

Reduciendo términos semejantes:

$M = (x^6 + x^6 - 2x^6) + (x^5 - x^5) + (x^4 + x^4 - 2x^4) + (x^3 - x^3)$
$\quad + (x^2 + x^2 - 2x^2) + (x - x) + (1 + 1)$

$M = x^6(2 - 2) + x^5 (1 - 1) + x^4 (2 - 2) + x^3(1 - 1) + x^2(2 - 2)$
$\quad + x(1 - 1) + 2$

$M = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 2$

$\therefore M = 2$



4 Simplifica:

$$P=\frac{x^{10}+x^8+x^6+x^4+x^2+1}{x^4+x^2+1}$$

Resolución:

Empleando el proceso inverso de solución, buscamos "x^2" en el dividendo y el divisor:

$$P=\frac{(x^2)^5+(x^2)^4+(x^2)^3+(x^2)^2+(x^2)^1+1}{(x^2)^2+(x^2)^1+1}=\frac{\dfrac{(x^2)^6-1}{x^2-1}}{\dfrac{(x^2)^3-1}{x^2-1}}$$

Caso I CN

$$P=\frac{x^{12}-1}{x^6-1}=\frac{(x^6)^2-1}{x^6-1}=(x^6)^1+1$$

$$\therefore P=\frac{x^{10}+x^8+x^6+x^4+x^2+1}{x^4+x^2+1}=x^6+1$$

5 Simplifica:

$$E=\frac{x^{78}+x^{76}+x^{74}+...+x^4+x^2+1}{x^{38}+x^{36}+x^{34}+...+x^4+x^2+1}$$

Resolución:

Expresando "E" en función de "x^2":

$$E=\frac{(x^2)^{39}+(x^2)^{38}+(x^2)^{37}+...+(x^2)^2+(x^2)^1+1}{(x^2)^{19}+(x^2)^{18}+(x^2)^{17}+...+(x^2)^2+(x^2)^1+1}$$

$$E=\frac{\dfrac{(x^2)^{40}-1}{x^2-1}}{\dfrac{(x^2)^{20}-1}{x^2-1}}=\frac{x^{80}-1}{x^{40}-1}=\frac{(x^{40})^2-1}{x^{40}-1}=x^{40}+1$$

Caso I CN

$$\therefore E=x^{40}+1$$

6 Halla n en el cociente notable:

$$\frac{x^{5n+3}-y^{5(n+6)}}{x^{n-1}-y^{n+2}}$$

Resolución:

Por ser CN, se cumple:

$$\Rightarrow \frac{5n+3}{n-1}=\frac{5(n+6)}{n+2}$$

$5n^2+13n+6=5n^2+25n-30$

$6+30=25n-13n$

$36=12n$

$\therefore n=3$

7 Halla (m + n), si el cociente notable:

$\dfrac{x^m-y^{54}}{x^5-y^n}$ tiene 6 términos.

Resolución:

$$\frac{m}{5}=\frac{54}{n}=6$$

$$\Rightarrow \frac{m}{5}=6 \;\wedge\; \frac{54}{n}=6$$

$m=30 \;\wedge\; n=9$

$\therefore m+n=39$

8 Determina el TI del cociente:

$$\frac{(x+2)^n-2^n}{x}$$

Resolución:

Damos la forma de un CN: $\dfrac{(x+2)^n-2^n}{(x+2)-2}$

Su desarrollo:

$$\underbrace{(x+2)^{n-1}+(x+2)^{n-2}\,.\,2+...+(x+2)\,.\,2^{n-2}+2^{n-1}}_{P(x)}$$

$$\Rightarrow \text{TI de } P(x)=P(0)=(2)^{n-1}+(2)^{n-2}\,.\,2+...+(2)\,.\,2^{n-2}+2^{n-1}$$

$$P(0)=\underbrace{2^{n-1}+2^{n-1}+...+2^{n-1}+2^{n-1}}_{n\text{ términos}}$$

$\therefore TI=n2^{n-1}$

9 Halla el valor de $E=\left(\dfrac{a-b}{3}\right)^2$, si $\dfrac{27x^3(3x)^a-(2y)^{2a+b}}{9x^2-16y^4}$ es un cociente notable de 9 términos.

Resolución:

Le damos forma de cociente notable:

$$\frac{(3x)^3(3x)^a-(2y)^{2a+b}}{(3x)^2-(2y)^4}=\frac{(3x)^{3+a}-(2y)^{2a+b}}{(3x)^2-(2y)^4}$$

El cociente notable tiene 9 términos:

$$\frac{3+a}{2}=\frac{2a+b}{4}=9$$

Efectuamos:

$3+a=18 \Rightarrow a=15$

$2a+b=36 \Rightarrow b=6$

Nos piden:

$$E=\left(\frac{a-b}{3}\right)^2=\left(\frac{15-6}{3}\right)^2=\left(\frac{9}{3}\right)^2=9$$

$\therefore E=9$

FACTORIZACIÓN

Recuerda

- Un polinomio está definido en un campo numérico si todos sus coeficientes pertenecen a dichos campos.
  $C(x;y) = 5ix^2 + \frac{2}{7}xy^3 - 2xy^2$
  Está definido en $\mathbb{C}$.
- Generalmente la factorización se realiza en los racionales ($\mathbb{Q}$).

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{2}{3}; \frac{3}{5}; -2; -1; 0; 5; 20; ...\right\}$



Atención

Un factor primo en los racionales es aquel que admite dos divisores: a la unidad y la misma expresión.

- $x^2 - 16$ (no es primo). Se puede expresar como: $(x + 4)(x - 4)$
- $x + 3$ sí es un factor primo. No es factorizable en los racionales ($\mathbb{Q}$).
- $x^2 - 7$ es factor primo en $\mathbb{Q}$. No es factor primo en $\mathbb{R}$; ya que:
  $x^2 - 7 = \underbrace{(x + \sqrt{7})(x - \sqrt{7})}$
  Factores primos en $\mathbb{R}$.

Ten en cuenta que la variable no está debajo del signo radical.



CONCEPTO

Es un proceso mediante el cual un polinomio se expresa como la multiplicación de factores primos.

METODOLOGÍAS DE FACTORIZACIÓN

A) Factor común (agrupación de términos)

Pasos a seguir:

- Verificar si toda la expresión presenta factores repetidos en varios términos, si estuviesen elevados a exponentes, elegir las bases comunes afectadas con el menor exponente.
- Si luego de verificar la expresión no se encuentran factores comunes, se agrupa los términos en forma conveniente de tal manera que se genere algún factor común o alguna identidad.
- Extraemos el factor común y el factor que quede se determina dividiendo los términos de este con el factor común que se extrajo.

Factoriza los siguientes ejemplos:

1. $P(x; y) = 3x^2y^3 - 6xy^2 + 11x^2y$

Resolución:

- Extraemos el factor común: xy
  $P(x; y) = xy(3xy^2 - 6y + 11x)$

2. $P(x) = x^{2n+1} + 5x^{2n+2} - x^n$

Resolución:

- Extraemos el factor común: x^n
  $P(x) = x^n(x^{n+1} + 5x^{n+2} - 1)$

3. $P(a; b) = 5a^5b + 10a^3b^3 - a^4b^2 - 2a^2b^4 + 5a^4b^2 + 10a^2b^4 - a^3b^3 - 2ab^5$

- Extraemos el factor común monomio "ab" de toda la expresión:
  $P(a; b) = ab(5a^4 + 10a^2b^2 - a^3b - 2ab^3 + 5a^3b + 10ab^3 - a^2b^2 - 2b^4)$
- Agrupamos en la forma señalada para luego factorizar convenientemente:
  $P(a; b) = ab((5a^4 + 5a^3b) + (10a^2b^2 + 10ab^3) - (a^3b + a^2b^2) - (2ab^3 + 2b^4))$
  $= ab(5a^3(a + b) + 10ab^2(a + b) - a^2b(a + b) - 2b^3(a + b))$
- Extraemos factor común (a + b): $P(a; b) = ab(a + b)(5a^3 + 10ab^2 - a^2b - 2b^3)$
- Agrupamos en forma señalada convenientemente: $P(a; b) = ab(a + b)((5a^3 - a^2b) + (10ab^2 - 2b^3))$
  $= ab(a + b)(a^2(5a - b) + 2b^2(5a - b))$
- Extraemos el factor común (5a – b): $\therefore P(a; b) = ab(a + b)(5a - b)(a^2 + 2b^2)$

B) Identidades

Es la aplicación inmediata de algunos productos notables:

I. Trinomio cuadrado perfecto (tcp)

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Ejemplo:

$16x^4 + 8x^2y^2 + y^4$
$= (4x^2)^2 + 2(4x^2)(y^2) + (y^2)^2 = (4x^2 + y^2)^2$

II. Diferencia de cuadrados

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Ejemplo:

$4x^2 - y^4 = (2x)^2 - (y^2)^2$
$= (2x + y^2)(2x - y^2)$

III. Diferencia de cubos

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Ejemplo:

$343x^3 - 8y^3 = (7x)^3 - (2y)^3$
$= (7x - 2y)(49x^2 + 14xy + 4y^2)$

IV. Suma de cubos

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Ejemplo:

$8c^9 + 27 = (2c^3)^3 + 3^3$
$= (2c^3 + 3)(4c^6 - 6c^3 + 9)$



C) Aspa simple

Se utiliza para factorizar particularmente polinomios de la forma:

$P(x) = Dx^{2n} \pm Ex^n \pm F$ $\quad$ $P(x; y) = Dx^{2m} \pm Ex^m y^n \pm Fy^{2n}$, donde m; n $\in \mathbb{Z}^+$

O cualquier otra expresión que se amolde a dichas formas.

Pasos a seguir:

- Descomponer los extremos.
- Verificar que la suma de productos en aspa sea igual al término central.

Ejemplos:

1. $P(x) = 5x^8 + 8x^4 + 3$

- Descomponemos los términos extremos y efectuamos en aspa:

$P(x) = 5x^8 + 8x^4 + 3$

$5x^4$	$+3$	$3x^4$
x^4	$+1$	$+5x^4$
		$+8x^4$

- Tomamos los factores en forma horizontal:

$\therefore P(x) = (5x^4 + 3)(x^4 + 1)$

2. $A(x; y) = 6x^4 - 17x^2y - 14y^2$

- Descomponemos los términos extremos y efectuamos en aspa:

$A(x; y) = 6x^4 - 17x^2y - 14y^2$

$3x^2$	$+ 2y$	$4x^2y$
$2x^2$	$- 7y$	$-21x^2y$
		$-17x^2y$

- Tomamos los factores en forma horizontal:

$A(x; y) = (3x^2 + 2y)(2x^2 - 7y)$

Nota

Factorización por adición y sustracción:

Factoriza: $x^4 + 1$

$x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2$

$(x^2 + 1)^2 - 2x^2$

$(x^2 + 1 + 2x)(x^2 + 1 - 2x)$



Recuerda

Cuando el tercer término tiene signo (–), los signos son distintos para sus respectivos factores primos.

D) Aspa doble

Se emplea para factorizar polinomios de dos variables necesariamente y que tenga seis términos que se adecuen a la forma general:

$M(x; y) = Ax^{2m} + Bx^my^n + Cy^{2n} + Dx^m + Ey^n + F$, donde m; n $\in \mathbb{Z}^+$

Pasos a seguir:

- Ordenar el polinomio de acuerdo a esta forma general.
- De faltar algún término, este se reemplazará en su lugar por ceros.
- Se trazan dos aspas simples entre los términos $Ax^{2m} \wedge Cy^{2n}$; $Cy^{2n} \wedge F$
- Se traza un aspa grande entre los extremos $Ax^{2m} \wedge F$
- Se verifican las aspas simples y el aspa grande.
- Se toman los factores en forma horizontal.

Ejemplo:

Factoriza

$B(x; y) = -21 + 9x + 30x^2 + 4xy - 13y - 2y^2$

Resolución:

Siguiendo los pasos:

$B(x; y) = 30x^2 + 4xy - 2y^2 + 9x - 13y - 21$

$10x$	$-2y$	-7
$3x$	y	3
(I)	(II)	(III)

(I) Aspa simple entre los términos $(30x^2; -2y^2)$:
$(3x)(-2y) + (10x)(y) = 4xy$

(II) Aspa simple entre los términos $(-2y^2; -21)$:
$(-2y)(3) + (y)(-7) = -13y$

(III) Aspa grande entre los términos $(30x^2; -21)$:
$(10x)(3) + (3x)(-7) = 9x$

$\therefore$ Tomando los factores en forma horizontal:
$B(x; y) = (10x - 2y - 7)(3x + y + 3)$

Nota

A los términos:

Ax^{2m}; Cy^{2n}; F

También se les llama términos fijos.



Problemas resueltos

1 Determina el número de factores primos de: $M(q) = q^8 - 82q^4 + 81$

Resolución:

Por el método del aspa simple:

$M(q) = q^8 - 82q^4 + 81$

$q^4 \quad -81 \qquad -81q^4$

$q^4 \quad -1 \qquad -q^4$

$-82q^4$

$M(q) = (q^4 - 81)(q^4 - 1)$

Desdoblamos las diferencias de cuadrados:

$M(q) = (q^2 + 9)(q^2 - 9)(q^2 + 1)(q^2 - 1)$

$= (q^2 + 9)(q + 3)(q - 3)(q^2 + 1)(q + 1)(q - 1)$

$\therefore$ El número de factores primos es 6.

2 Factoriza $P(x; y) = x^3y - xy^3$ e indica los factores primos.

Resolución:

Aplicamos el método del factor común:

$P(x; y) = x^3y - xy^3$

$P(x; y) = xy(x^2 - y^2)$

$P(x; y) = xy(x + y)(x - y)$

Sus factores primos son x; y; $x + y$; $x - y$

3 Factoriza $M(a; b) = 64a^7b^7 - ab^{13}$

Da como respuesta la suma de los factores primos binomios.

Resolución:

Aplicamos agrupación de términos y el método de identidades:

$M(a; b) = ab^7(64a^6 - b^6)$

$M(a; b) = ab^7((8a^3)^2 - (b^3)^2)$

$M(a; b) = ab^7(8a^3 - b^3)(8a^3 + b^3)$

$M(a; b) = ab^7(2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2)(2a + b)(4a^2 - 2ab + b^2)$

Piden: $2a - b + 2a + b = 4a$

4 Factoriza $P(x) = x^2 + (b - a)x - ab$ e indica un factor primo.

Resolución:

Por el método del aspa simple:

$P(x) = x^2 + (b - a)x - ab$

$x \qquad -a$

$x \qquad b$

$= (x - a)(x + b)$

$\therefore$ Un factor primo es $(x - a)$.

5 Factoriza $P(x; y) = 3x^2 - 5xy - 2y^2$ e indica el factor primo con mayor suma de coeficientes.

Resolución:

$P(x; y) = 3x^2 - 5xy - 2y^2$

$3x \qquad +1y$

$1x \qquad -2y$

$P(x; y) = (3x + y)(x - 2y)$

Piden el factor primo con mayor suma de coeficientes:

$(3x + y) \Rightarrow \Sigma coef. = 4$

6 Factoriza la siguiente expresión:

$E(x; y) = 6x^2 + xy - 2y^2 + 9x - y + 3$

Resolución:

Por aspa doble:

$6x^2 + xy - 2y^2 + 9x - y + 3$

$3x \qquad +2y \qquad +3$

$2x \qquad -y \qquad +1$

$E(x; y) = (3x + 2y + 3)(2x - y + 1)$

7 Factoriza $Q(a; b) = a^2 - c^2 + b^2 - 2ab$

Da como respuesta la suma de los términos de los factores primos.

Resolución:

Aplicamos el método de identidades:

$Q(a; b) = a^2 - c^2 + b^2 - 2ab$

$Q(a; b) = a^2 - 2ab + b^2 - c^2$

$Q(a; b) = (a - b)^2 - c^2$

$Q(a; b) = (a - b + c)(a - b - c)$

Nos piden: $a - b + c + a - b - c = 2a - 2b$

8 Factoriza $F(x; y) = (xy)^2 + x^2y + xy^2 + 2xy + x + y + 1$ e indica el factor primo de segundo grado.

Resolución:

Reordenamos convenientemente para aplicar identidades y el método del factor común:

$F(x; y) = (xy)^2 + 2(xy) + 1 + xy(x + y) + (x + y)$

$F(x; y) = (xy + 1)^2 + (x + y)(xy + 1)$

$F(x; y) = (xy + 1)(xy + 1 + x + y)$

$F(x; y) = (xy + 1)(x(y + 1) + (y + 1))$

$F(x; y) = (xy + 1)(y + 1)(x + 1)$

$\therefore$ El factor común de grado 2 es $(xy + 1)$.

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (MCD) MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (MCM) FRACCIONES ALGEBRAICAS



MÁXIMO COMÚN DIVISOR (MCD)

Es aquella expresión de mayor grado posible contenida como factor un número entero de veces, en dos o más expresiones algebraicas. La expresión algebraica deducida debe tener mayor coeficiente numérico.

Procedimiento

a) Se factorizan las expresiones.

b) El MCD estará formado por los factores comunes con su menor exponente.

Ejemplo:

$M(x) = 32x^2(x^2+1)(2x+1)^3(x+7)^2 = 2^5 \cdot x^2(x^2+1)(2x+1)^3(x+7)^2$

$N(x) = 56x(x^2+1)^7(2x+1)^2(x+y-7) = 7 \cdot 2^3 \cdot x(x^2+1)^7(2x+1)^2(x+y-7)$

$\Rightarrow MCD(M;N) = 2^3x(x^2+1)(2x+1)^2$ (factores comunes a M y N).

Atención

El MCD de dos o más números es el mayor coeficiente numérico:
Así:

- Divisores de 27: 1; 3; 9; 27
- Divisores de 45: 1; 3; 5; 9; 15; 45

$\Rightarrow MCD(27;45) = 9$



MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (MCM)

Es aquella expresión de menor grado posible que contiene un número entero de veces como factor a dos o más expresiones algebraicas. La expresión algebraica deducida debe tener menor coeficiente numérico.

Procedimiento

a) Se factorizan las expresiones.

b) El MCM estará formado por los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

Ejemplo:

$M(x;y) = 9xy^2\,(x^2+y)^3\,(x-y)(x+y^2)^4$

$N(x;y) = 7x^3y^3\,(x+y)(x-y)(x+y^2)^{10}\,(x-3y)$

$\Rightarrow MCM(M;N) = 63x^3y^3\,(x-y)(x+y^2)^{10}\,(x+y)\,(x-3y)(x^2+y)^3$

Propiedades

1. Si dos o más expresiones son primos entre sí, su MCD es la unidad y su MCM el producto de ellos.

   Ejemplo:

   $E = 14 = 2 \times 7;\ F = 15 = 3 \times 5$

   $\Rightarrow MCM(E;F) = \underbrace{(2\times 7)}_{E} \times \underbrace{(3\times 5)}_{F} = 210$

   $\left.\begin{array}{l}\text{Divisores de E: } 1;\ 2;\ 7;\ 14\\ \text{Divisores de F: } 1;\ 3;\ 5;\ 15\end{array}\right\} \Rightarrow MCD(E;F) = 1$

2. Dados dos expresiones algebraicas E y F, su MCD por su MCM es igual al producto de EF.

   $MCD(E;F)\ MCM(E;F) = E.F$

   Ejemplo:

   $E = 2 = 2^1 \quad MCD(E;F) = 2 \ \wedge\ MCM(E;F) = 2^2$

   $F = 4 = 2^2 \quad MCD(E;F) \cdot MCM(E;F) = 2 \times 2^2 = 8 = E.F$

Atención

El MCM de dos o más números es el menor múltiplo de ellos que sean iguales.

Así:

- Múltiplos de 7: 7; 14; 21; 28; 35; 42; 49; 56
- Múltiplos de 4: 4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32

$\Rightarrow MCM(7;4) = 28$



FRACCIONES ALGEBRAICAS

Clases

Fracción impropia

Es cuando el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador.

Ejemplos:

$$\frac{x+1}{x-1}\ ;\ \frac{x^3+3x-1}{x^2+1}\ ;\ \frac{121x}{x+1}\ ;\ \frac{x^3+2y}{y}$$

Fracciones complejas

Cuando al menos uno de sus términos es una expresión fraccionaria.

Ejemplos:

$$\frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2+1}}{x+\frac{1}{x-1}}\ ;\ \frac{\frac{3x-1}{2x+1}-1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}{3x-2+\frac{3}{3x+\frac{2}{x}}}$$

Operaciones con las fracciones algebraicas

Comúnmente se presentan una suma o diferencia de fracciones, para ello haremos el producto en aspa y luego multiplicamos los denominadores.

Veamos:

- $\frac{A}{M} - \frac{B}{N} = \frac{AN - BM}{MN}$
- $\frac{C}{P} + \frac{D}{Q} = \frac{CQ + DP}{PQ}$

También se presentan:

- $\frac{A}{B} = A.B^{-1}$
- $\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{AD}{BC}$
- $\frac{1}{M-N} = -\frac{1}{N-M}$
- $\frac{-M}{N} = -\frac{M}{N} = \frac{M}{-N}$
- $\frac{M}{N} \div \frac{P}{Q} = \left(\frac{M}{N}\right)\left(\frac{Q}{P}\right) = \frac{M.Q}{N.P}$
- $\left(\frac{A}{B}\right)\left(\frac{C}{D}\right) = \frac{A.C}{B.D}$
- $\frac{\frac{A}{B}}{C} = \frac{AC}{B}$

Nota

1. $\frac{1}{\frac{1}{n}} = n$
2. $\frac{\frac{1}{1}}{n} = \frac{1}{n}$
3. $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$
4. $\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n = \frac{y^n}{x^n}$
5. $\frac{m^2}{x} + \frac{n^2}{x} - \frac{mn}{x}$
$= \frac{m^2 + n^2 - mn}{x}$



Ejemplo:
Simplifica la siguiente fracción algebraica:

$$M = \frac{x}{x+3} + \frac{2x}{x^2+4x+3} + \frac{1}{x+1}$$

Se observa adición de fracciones algebraicas. Encontramos el MCM de los denominadores, para ello primero factorizamos el denominador cuadrático:

$$x^2 + 4x + 3 \Rightarrow (x+3)(x+1)$$

x   3
x   1

Luego el MCM de los denominadores es: $(x+3)(x+1)$
Entonces:

$$M = \frac{x}{x+3} + \frac{2x}{x^2+4x+3} + \frac{1}{x+1} = \frac{x(x+1) + 2x + 1(x+3)}{(x+3)(x+1)} = \frac{x^2+4x+3}{(x+3)(x+1)} = \frac{(x+3)(x+1)}{(x+3)(x+1)} = 1$$

Por lo tanto: $M = 1$

EFECTUAR

Grupo I

1. Indica el MCD de:
   $A = (x+3)^4(x+5)^6$
   $B = (x+5)^2(x+3)^8$

2. Indica el MCM de:
   $A = x^3y^4z^6$
   $B = x^5y^2z^4$

3. Halla el MCD de:
   $A = x^2 - y^2$
   $B = x^2 - 2xy + y^2$

4. Halla el MCM de:
   $A = x^2 - y^2$
   $B = x^2 + 2xy + y^2$

5. Si el MCD de:
   $A = 6x^{m+1}y^{n-2}$
   $B = 4x^{m+3}y^{n-4}$
   es px^4y^2.
   Calcula: m . n . p

6. Si el MCM de:
   $A = 6x^{m-5}y^{n+3}$
   $B = 4x^{m-1}y^{n+1}$
   es: px^4y^4.
   Calcula: m + n + p

7. Siendo:
   $A(x) = x^2 + 3x - 10$
   $B(x) = x^4 - 25x^2$
   $C(x) = x^3 + 4x^2 - 5x$
   Halla el MCD(A; B; C).

8. Siendo:
   $A(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2$
   $B(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$
   $C(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
   Halla el MCM(A; B; C).

Grupo II

9. Simplifica:
   $S = \frac{x^2 - y^2}{x - y}$

10. Reduce:
   $U = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$

11. Simplifica:
   $R = \frac{x^2 + 1}{2x^2 + 2}$

12. Simplifica:
   $T = \frac{3x^2 - 3x}{2x^3 - 2x^2}$

13. Reduce:
   $M = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$

14. Simplifica:
   $A = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x + y}$

15. Reduce:
   $B = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 2^2}$

16. Simplifica:
   $I = \frac{4x + 4}{2x + 2}$

17. Reduce:
   $T = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}$

18. Reduce:
   $R = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - x}}$

19. Reduce:
   $M = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}}$

Problemas resueltos

1 Halla el MCD de:
$A = 3x^5y^2z^3k^5$
$B = 2xyzk$
$C = 5xzk$

Resolución:
$A = 3x^5y^2z^3k^5$; $B = 2xyzk$ y $C = 5xzk$
$\therefore$ MCD(A; B; C) = xzk

2 Halla el MCD de $2x^4y^2z^2$; $8x^2z^6$; $6x^5y^7z^4$.

Resolución:

2 - 8 - 6	2
1 4 3	

$\therefore$ MCD$(2x^4y^2z^2; 8x^2z^6; 6x^5y^7z^4) = 2x^2z^2$

3 Halla el MCD de:
$A(x) = x^2 - 4$
$B(x) = x^2 - x - 6$
$C(x) = x^2 - x - 6$

Resolución:
$A(x) = x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$
$B(x) = x^2 - x - 6$
x −3
x 2
$B(x) = C(x) = (x - 3)(x + 2)$
Nos piden: MCD(A; B; C) = x + 2

4 Simplifica la expresión:

$$M = \frac{a^2 - b^2}{ab} - \frac{ab - b^2}{ab - a^2}$$

Resolución:

$$M = \frac{a^2 - b^2}{ab} - \frac{b(a - b)}{a(b - a)} = \frac{a^2 - b^2}{ab} + \frac{b(b - a)}{a(b - a)}$$

$$M = \frac{a^2 - b^2}{ab} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 - b^2 + b^2}{ab} = \frac{a^2}{ab} = \frac{a}{b}$$

$$\therefore M = \frac{a}{b}$$

5 Luego de simplificar:
$E = \dfrac{a^2 + ab + ac + bc}{a^2 - b^2}$, halla la diferencia entre el numerador y el denominador.

Resolución:

$$E = \frac{a(a + b) + c(a + b)}{(a + b)(a - b)}$$

$$E = \frac{a + c}{a - b}$$

$\therefore$ $a + c - (a - b) = a + c + b - a = b + c$

6 Determina el MCD y MCM de:
$A(x) = x^2 - 5x + 6$ y $B(x) = x^2 + 2x - 8$

Resolución:
$A(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$
x −3
x −2

$B(x) = x^2 + 2x - 8$
x +4
x −2
$B(x) = (x + 4)(x - 2)$

$\Rightarrow$ MCD(A(x); B(x)) = (x − 2) (factor común)
$\Rightarrow$ MCM(A(x); B(x)) = (x − 3)(x − 2)(x + 4) (contiene a ambos polinomios)

7 Sean a y b $\in \mathbb{Z}$.
Si: $\dfrac{a}{2x - 1} + \dfrac{b}{x - 3} = \dfrac{12x - 11}{2x^2 - 7x + 3}$; determina a y b.

Resolución:
Operamos las fracciones:

$$\frac{a(x - 3) + b(2x - 1)}{(2x - 1)(x - 3)} = \frac{12x - 11}{2x^2 - 7x + 3}$$

2x −1
x −3 (factorizamos por aspa simple)

$$\frac{ax - 3a + 2bx - b}{(2x - 1)(x - 3)} = \frac{12x - 11}{(2x - 1)(x - 3)}$$

$\Rightarrow$ $(a + 2b)x - 3a - b = 12x - 11$
$\Rightarrow$ $a + 2b = 12 \wedge -3a - b = -11$ $\therefore a = 2 \wedge b = 5$

8 Determina el MCM y MCD de:
$x^{n-2}y^{-2}$; $x^{n-3}y^{-3} \wedge x^{n-1}y^{-1}$

Resolución:
Ordenamos:

$$\frac{x^{n-1}}{y}; \frac{x^{n-2}}{y^2}; \frac{x^{n-3}}{y^3}$$

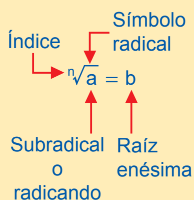
$\Rightarrow$ MCM $= \underbrace{\dfrac{1}{y} \cdot x^{n-1}}$ Múltiplo de los 3 términos

$\Rightarrow$ MCD $= \underbrace{\dfrac{1}{y^3} \cdot x^{n-3}}$ Divisor de los 3 términos

RADICACIÓN - RACIONALIZACIÓN

Recuerda

- Los elementos de un radical:



- Teoremas:

1. $a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p$
2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}} = \sqrt[mnp]{a}$
4. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; $b \neq 0$
5. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n.m]{a^m}$
6. $a^p\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^{np}b}$
7. $\sqrt[m]{a^m} = a = \sqrt[m]{a}^m; a > 0$



Nota

Cuando el radicando $A^2 - B$ es un cuadrado perfecto, dará una raíz exacta que se le llamará C, de forma que:

$$C = \sqrt{A^2 - B}$$

Luego (1) y (2) quedará:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

RADICACIÓN

Es aquella operación algebraica que consiste en hallar una expresión numérica llamada raíz, conocidas dos cantidades denominadas índice y cantidad subradical.

RADICAL

Llamamos radical simple a la expresión $\sqrt[n]{a}$, cumpliéndose que:

$$\sqrt[n]{a} = b \Rightarrow b^n = a\,;\, n \in \mathbb{N};\, n \geq 2$$

Las cantidades "a y b" serán positivas siempre que "n" sea un número par.

Clases de radicales

Radicales semejantes

Estos tienen la misma expresión subradical y el mismo índice.

Ejemplo:

Los radicales $121\sqrt[7]{x+y}$; $7\sqrt[7]{x+y}$; $-\sqrt[7]{x+y}$

Por tener la misma expresión subradical x + y, así como el mismo índice 7.

Radicales homogéneos

Estos se caracterizan por tener el mismo índice.

Ejemplos:

- $\sqrt{7}$; $\sqrt{87}$; $\sqrt{x+y}$ son homogéneos de índice 2.
- $\sqrt[9]{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[9]{101}$; $\sqrt[9]{b}$ son homogéneos de índice 9.

Transformación de radicales dobles a radicales simples

Radicales de la forma: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$

Los radicales de la forma $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$, siendo A y B números racionales positivos ($\mathbb{Q}^+$) pueden tomar la forma:

$$\sqrt{x} \pm \sqrt{y} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} & \text{...(1)} \\ \sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{x} - \sqrt{y} & \text{...(2)} \end{cases}$$

Para hallar los valores de x e y se siguen los siguientes pasos:

1. Sumamos miembro a miembro (1) y (2), elevamos al cuadrado; luego tenemos:

$$(\sqrt{A+\sqrt{B}} + \sqrt{A-\sqrt{B}})^2 = (2\sqrt{x})^2 \Rightarrow 2A + 2\sqrt{A^2 - B} = 4x \Rightarrow \boxed{x = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

2. En forma análoga, ahora restamos y posteriormente elevamos al cuadrado:

$$(\sqrt{A+\sqrt{B}} - \sqrt{A-\sqrt{B}})^2 = (2\sqrt{y})^2 \Rightarrow 2A - 2\sqrt{A^2 - B} = 4y \Rightarrow \boxed{y = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

Ejemplo:

Transforma a radicales simples: $\sqrt{5 + \sqrt{24}}$

Resolución:

- Hacemos: $\sqrt{5+\sqrt{24}} = \sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}\,;\, A = 5 \wedge B = 24$
- Luego reemplazamos: $\sqrt{5+\sqrt{24}} = \underbrace{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5^2-24}}{2}}}_{x} + \underbrace{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5^2-24}}{2}}}_{y} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

Radicales de la forma: $\sqrt{A \pm 2\sqrt{B}}$

Cuando un radical doble es de la forma $\sqrt{A \pm 2\sqrt{B}}$ se pueden determinar dos números x e y que cumplan con las siguientes relaciones:

$x + y = A \quad \wedge \quad xy = B$



Así se verificará que: $\sqrt{x+y\pm2\sqrt{xy}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$

Ejemplo:

Transforma a radicales simples: $\sqrt{10-\sqrt{84}}$

Resolución:

Dándole la forma adecuada $\sqrt{10-\sqrt{84}}=\sqrt{10-2\sqrt{21}}$

$$=\sqrt{7+3-2\sqrt{7.3}}$$

Según las relaciones establecidas $\sqrt{10-\sqrt{84}}=\sqrt{7}-\sqrt{3}$

RACIONALIZACIÓN

Es el proceso de transformación ya sea del numerador o denominador irracional en otra equivalente que tenga numerador o denominador racional, respectivamente.

Factor racionalizante (conjugado del denominador)(FR)

Lo común es racionalizar denominadores, para ello es suficiente multiplicar los dos términos de una fracción por un número racional convenientemente elegido, este número toma el nombre de factor racionalizante.

Fracción a racionalizar: $\dfrac{N}{\sqrt[a]{P^b}}$; siendo $a > b$

A la fracción planteada multiplicamos sus términos por el siguiente FR:

$$\boxed{\sqrt[a]{P^{a-b}}}\Rightarrow\frac{N}{\sqrt[a]{P^b}}\frac{\left(\sqrt[a]{P^{a-b}}\right)}{\left(\sqrt[a]{P^{a-b}}\right)}$$

Nota que los exponentes de P: b y a – b suman “a” (índice del radical).

Ejemplos:

1. $\dfrac{1}{\sqrt{7}}=\dfrac{1}{\sqrt{7}}.\dfrac{\sqrt{7^{2-1}}}{\sqrt{7^{2-1}}}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

2. $\dfrac{20}{\sqrt[3]{10^2}}=\dfrac{20}{\sqrt[3]{10^2}}\left(\dfrac{\sqrt[3]{10^{3-2}}}{\sqrt[3]{10^{3-2}}}\right)=\dfrac{20\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{10^2}\sqrt[3]{10}}=\dfrac{20\sqrt[3]{10}}{10}=2\sqrt[3]{10}$

3. $\dfrac{ab}{\sqrt[9]{a^7b^5c^2}}=\dfrac{ab}{\sqrt[9]{a^7b^5c^2}}\left(\dfrac{\sqrt[9]{a^{9-7}b^{9-5}c^{9-2}}}{\sqrt[9]{a^{9-7}b^{9-5}c^{9-2}}}\right)=\dfrac{ab\sqrt[9]{a^2b^4c^7}}{abc}=\dfrac{\sqrt[9]{a^2b^4c^7}}{c}$

Fracción a racionalizar: $\dfrac{N}{\sqrt[2m]{a}\pm\sqrt[2m]{b}}$; $m\in\mathbb{N}$

Se multiplica el numerador y denominador por la “conjugada”:

$$\boxed{\sqrt[2m]{a}\mp\sqrt[2m]{b}}\Rightarrow\frac{N}{\sqrt[2m]{a}\pm\sqrt[2m]{b}}\frac{\left(\sqrt[2m]{a}\mp\sqrt[2m]{b}\right)}{\left(\sqrt[2m]{a}\mp\sqrt[2m]{b}\right)}$$

Ejemplos:

1. $\dfrac{4}{\sqrt[4]{11}+\sqrt[4]{7}}=\dfrac{4}{\sqrt[4]{11}+\sqrt[4]{7}}\left(\dfrac{\sqrt[4]{11}-\sqrt[4]{7}}{\sqrt[4]{11}-\sqrt[4]{7}}\right)=\dfrac{4\left(\sqrt[4]{11}-\sqrt[4]{7}\right)}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}=\dfrac{4\left(\sqrt[4]{11}-\sqrt[4]{7}\right)}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}\left(\dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{7}}{\sqrt{11}+\sqrt{7}}\right)$

$$=\frac{4\left(\sqrt[4]{11}-\sqrt[4]{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)}{11-7}=\frac{4\left(\sqrt[4]{11}-\sqrt[4]{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)}{4}=\left(\sqrt[4]{11}-\sqrt[4]{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)$$

2. $\dfrac{18}{\sqrt{13}+\sqrt{10}}=\dfrac{18}{\sqrt{13}+\sqrt{10}}\left(\dfrac{\sqrt{13}-\sqrt{10}}{\sqrt{13}-\sqrt{10}}\right)=\dfrac{18\left(\sqrt{13}-\sqrt{10}\right)}{13-10}=6\left(\sqrt{13}-\sqrt{10}\right)$

Atención

En las operaciones con radicales ten en cuenta los siguientes procedimientos.

- **Para introducir factores en una raíz**
  Los exponentes de los factores quedan multiplicados por el índice del radical.

  Así:

  $xy^2z\sqrt[5]{3xyw}=\sqrt[5]{x^5\left(y^2\right)^5z^5\,3xyw}$

  $=\sqrt[5]{3x^6y^{11}z^5w}$

- **Para extraer factores de una raíz**
  Se considera aquellos factores que sus exponentes son mayores o iguales al índice del radical.

  Así:

  $\sqrt[8]{x^{11}y^{20}z^2w^3}=\sqrt[8]{x^8x^3\left(y^2\right)^8y^4z^2w^3}$

  $=xy^2\sqrt[8]{x^3y^4z^2w^3}$



Recuerda

El siguiente producto notable:

Diferencia de cuadrados

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

el cual en este caso se puede presentar como:

$\left(\sqrt[2m]{a}+\sqrt[2m]{b}\right)\left(\sqrt[2m]{a}-\sqrt[2m]{b}\right)$

$=\sqrt[m]{a}-\sqrt[m]{b}$



Problemas resueltos

1 Transforma:

$M = \sqrt{14 + \sqrt{180}}$ a radical simple.

Resolución:

$M = \sqrt{14 + \sqrt{2 \times 9 \times 5 \times 2}} = \sqrt{14 + 2\sqrt{45}}$

$\Rightarrow 14 = 9 + 5 \ \wedge \ 45 = 9 \times 5$

$\therefore M = \sqrt{9} + \sqrt{5} = 3 + \sqrt{5}$

2 Efectúa:

$Y = \sqrt{7 + 2\sqrt{10}} - \sqrt{5}$

Resolución:

$7 = 5 + 2 \ \wedge \ 10 = 5 \times 2$

$\Rightarrow \sqrt{7 + 2\sqrt{10}} = \sqrt{5} + \sqrt{2}$

$\therefore Y = \sqrt{5} + \sqrt{2} - \sqrt{5} = \sqrt{2}$

3 Transforma a radicales simples:

$A = \sqrt{9 + \sqrt{72}}$

Resolución:

$$x = \frac{9 + \sqrt{9^2 - 72}}{2} = \frac{9 + \sqrt{9}}{2} = 6$$

$$y = \frac{9 - \sqrt{9^2 - 72}}{2} = \frac{9 - \sqrt{9}}{2} = 3$$

$\therefore \ A = \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{6} + \sqrt{3}$

4 El valor equivalente de $\dfrac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} - 2\sqrt{2}$ es:

Resolución:

Dando forma:

$$\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2 - 2\sqrt{\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}}}} - 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}} - 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - 1} - 2\sqrt{2}$$

Racionalizando: $\dfrac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} - 2\sqrt{2}$

Operamos:

$$\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2} + 2\sqrt{6} - 4\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$$

5 Efectúa:

$M = \dfrac{35}{\sqrt[3]{7}} - 5\sqrt[3]{49}$

Resolución:

$$M = \frac{35 \times \sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7} \times \sqrt[3]{7^2}} - 5\sqrt[3]{49}$$

$$M = \frac{35\sqrt[3]{49}}{\sqrt[3]{7^3}} - 5\sqrt[3]{49}$$

$$M = \frac{35\sqrt[3]{49}}{7} - 5\sqrt[3]{49} = 5\sqrt[3]{49} - 5\sqrt[3]{49}$$

$\Rightarrow M = 0$

6 Calcula:

$R = \sqrt{7 + 2\sqrt{12}} + \sqrt{7 - 2\sqrt{12}}$

Resolución:

Dando uso a la transformación de radicales dobles a radicales simples, tenemos:

$R = \sqrt{7 + 2\sqrt{4 \times 3}} + \sqrt{7 - 2\sqrt{4 \times 3}}$

$R = \sqrt{(4 + 3) + 2\sqrt{4 \times 3}} + \sqrt{(4 + 3) - 2\sqrt{4 \times 3}}$

$R = (\sqrt{4} + \sqrt{3}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3})$

$R = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4$

$\therefore \ R = 4$

7 Racionaliza:

$\dfrac{23}{\sqrt{27 + 2\sqrt{50}}}$

Resolución:

$$\frac{23}{\sqrt{27 + 2\sqrt{50}}} = \frac{23}{\sqrt{25 + 2 + 2\sqrt{25.2}}}$$

$$= \frac{23}{(5 + \sqrt{2})} \times \frac{(5 - \sqrt{2})}{(5 - \sqrt{2})} = 5 - \sqrt{2}$$

8 Efectúa:

$\dfrac{6}{\sqrt{7 - \sqrt{40}} + \sqrt{3 - \sqrt{8}} + \sqrt{12 - \sqrt{140}}} - 1$

Resolución:

$$\frac{6}{\sqrt{7 - \sqrt{40}} + \sqrt{3 - \sqrt{8}} + \sqrt{12 - \sqrt{140}}} - 1$$

Dando forma:

$$\frac{6}{\sqrt{7 - 2\sqrt{10}} + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{12 - 2\sqrt{35}}} - 1$$

Pasamos a radicales simples:

$$\frac{6}{\sqrt{5} - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{7} - \sqrt{5}} - 1 = \frac{6(\sqrt{7} + 1)}{(\sqrt{7} - 1)(\sqrt{7} + 1)} - 1$$

$$= \frac{6(\sqrt{7} + 1)}{6} - 1 = \sqrt{7}$$



CANTIDAD IMAGINARIA

Es el número que resulta de extraer la raíz de índice par a un número real negativo.

$$\sqrt[2n]{-N} = \sqrt[2n]{N}\,\sqrt[2n]{-1} = \sqrt[2n]{N}\,i = i\sqrt[2n]{N} \qquad N \in \mathbb{R}^+,\ n \in \mathbb{Z}^+$$

Ejemplos:

1. $\sqrt{-4} = \sqrt{4}\,\sqrt{-1} = 2i$
2. $\sqrt{-81} = \sqrt{81}\,\sqrt{-1} = 9i$
3. $\sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64}\,.\sqrt[6]{-1} = 2i$
4. $\sqrt[10]{-59\,049} = \sqrt[10]{59\,049}\,\sqrt[10]{-1} = 3i$

Nota

La unidad imaginaria es el número que resulta de extraer la raíz cuadrada al negativo de la unidad.

$\sqrt{-1} = i$ (notación universal)

POTENCIAS ENTERAS DE LA UNIDAD IMAGINARIA

Estudiaremos el comportamiento de i^n, $n \in \mathbb{Z}^+$. Veamos los grupos de 4:

$i^1 = i$	$i^5 = i^4\,.\,i = i$	$i^9 = i^{2(4)}\,.\,i = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = i^4\,.\,i^2 = -1$	$i^{10} = i^{2(4)}\,.\,i^2 = -1$
$i^3 = i^2\,.\,i = -1\,.\,i = -i$	$i^7 = i^4\,.\,i^3 = -i$	$i^{11} = i^{2(4)}\,.\,i^3 = -i$
$i^4 = i^3\,.\,i = -i\,.\,i = -i^2 = 1$	$i^8 = i^4\,.\,i^4 = 1$	$i^{12} = i^{2(4)}\,.\,i^4 = 1$
		$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Podemos apreciar que:

- Las únicas potencias que se obtienen cada cuatro grupos son: i, –1, –i, 1.
- La unidad imaginaria i elevada a un múltiplo de cuatro siempre es 1.

Con estas apreciaciones se deducen las siguientes propiedades:

Propiedades

1. $i^{4n} = i^4 = 1$
2. $i^{4n+k} = i^{4n}\,.\,i^k = i^k$

   $\Rightarrow$ Si: $k = 1 \Rightarrow i^{4n+1} = i$;

   Si: $k = 2 \Rightarrow i^{4n+2} = i^2 = -1$;

   Si: $k = 3 \Rightarrow i^{4n+3} = i^3 = -i$
3. $i + i^2 + i^3 + i^4 = 0$
4. En general: $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0$
5. $\dfrac{1+i}{1-i} = i$ $\quad \dfrac{1-i}{1+i} = -i$
6. $i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + \ldots + i^{4n} = 0$

Ejemplos:

- $i^7 + i^8 + i^9 + i^{10} = 0$
- $i^{-10} + i^{-9} + i^{-8} + i^{-7} = 0$
- $i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + \ldots + i^{216} = 0$
- $i^{-1} + i^{-2} + i^{-3} + i^{-4} + i^{-5} + i^{-6} + \ldots + i^{-1284} = 0$

Observación

Raíz cúbica de la unidad

$z^3 = 1 \Rightarrow z = \sqrt[3]{1}$

$$\sqrt[3]{1} = \begin{cases} 1 \\ -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

(las dos últimas: conjugadas)



NÚMEROS COMPLEJOS

Un número complejo z es aquel que está formado por la unión de una parte real y otra imaginaria.
Veamos su notación y respectivas partes:

$$z = a + bi = (a;\,b) = \text{Re}(z) + \text{Im}(z)i \ ;\ a \text{ y } b \in \mathbb{R}$$

Donde:
a = Re(z): parte real del número complejo z.
b = Im(z): parte imaginaria del número complejo z.

Ejemplos:

- $z = 3 + 2i = (3;\,2)$

  $\text{Re}(z) = 3 \wedge \text{Im}(z) = 2$
- $z = (-5;\,0) = -5 + 0i = -5$

  $\text{Re}(z) = -5 \wedge \text{Im}(z) = 0$
- $z = \dfrac{-1}{2} + \sqrt{3}\,i = \left(\dfrac{-1}{2};\,\sqrt{3}\right)$

  $\text{Re}(z) = -\dfrac{1}{2} \wedge \text{Im}(z) = \sqrt{3}$

CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

I. Complejos iguales

Dos números complejos son iguales si tienen iguales tanto sus partes reales como imaginarias.

$$M + Ni = P + Qi \Rightarrow M = P \wedge N = Q$$

Ejemplo:

$R = -5 + 2i$ y $S = -5 + 2i \Rightarrow R = S$

II. Complejo nulo

Es aquel cuyas partes real e imaginaria son nulas.

$$z = 0 + 0i = 0$$

Ejemplos:

- $a = 0 + 0i$
- $b = 0$
- $c = 0i$

III. Complejo real o puramente real

Es aquel cuya parte imaginaria es nula.

$$z = a + 0i = a;\ \forall a \in \mathbb{R}$$

Ejemplos:

- $c = 5 + 0i = 5$
- $d = -\sqrt{7}$

IV. Complejo imaginario puro

Es aquel cuya parte real es nula.

$$z = 0 + bi = bi;\ \forall b \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Ejemplos:

- $E = 0 + 7i = 7i$
- $F = \sqrt{10}\,i$
- $Z = 7i$

Complejos especiales

A) Complejos conjugados

Complejo: $z = a + bi$
Complejo conjugado: $\bar{z} = a - bi$

Ejemplos:

- $z = 5 - 8i \Rightarrow \bar{z} = 5 + 8i$
- $z = \left(\frac{1}{2}; -\frac{2}{7}\right) \Rightarrow \bar{z} = \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{7}\right)$

B) Complejos opuestos

Complejo: $z = a + bi$
Complejo opuesto: $z^* = -a - bi$

Ejemplos:

- $z = -\sqrt{3} + 3i \Rightarrow z^* = \sqrt{3} - 3i$
- $z = 4 - i \Rightarrow z^* = -4 + i$

Atención

- A la representación $a + bi$ también se le conoce como: FORMA CANÓNICA DE UN NÚMERO COMPLEJO.
- $\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = i\,.\,i = i^2 = -1$
- $\sqrt{-1}.\sqrt{-1} \neq \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$
  Este error se evita representando a los números complejos en la forma $a + bi$.
- Sobre el campo de los números complejos ($\mathbb{C}$) se verifican las leyes conmutativa, asociativa, distributiva respecto a la adición y multiplicación.



Nota

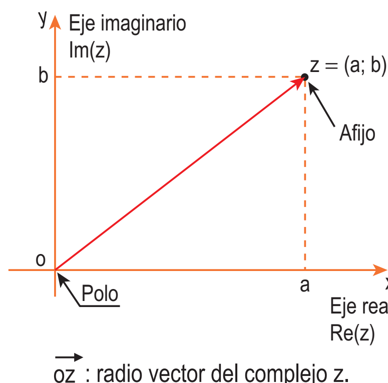
$i^{-n} = (-1)^n\, i^n;\ \forall n \in \mathbb{Z}$

Si $n \in \mathbb{Z}$ y $K \in \mathbb{R}$ se cumple:

$$(\overset{\circ}{4} \pm K)^n = \begin{cases} \overset{\circ}{4} \pm K^n;\ n \text{ par} \\ \overset{\circ}{4} \pm K^n;\ n \text{ impar} \end{cases}$$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

Dado el número complejo en su forma binómica: $z = a + bi$; este puede ser representado en su forma cartesiana: $z = (a; b)$



$\overrightarrow{oz}$: radio vector del complejo z.

Módulo de un número complejo:

Sea: $z = (a; b) = a + bi$

El módulo de z representado por $|z|$ estará dado por:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ejemplo:

- $T = 2 - 3i \Rightarrow |T| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

Observaciones

A la representación cartesiana de un número complejo también se le denomina plano de Gauss.



OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

Dados los complejos: $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, definimos las operaciones:

I. Suma

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Ejemplo:

- $(2 + 3i) + (-7 + 2i) = (2 - 7) + (3 + 2)i = -5 + 5i$

II. Resta

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Ejemplo:

- $(10 - 3i) - (7 + 2i) = (10 - 7) + (-3 - 2)i = 3 - 5i$

III. Multiplicación

$$z_1\,.\,z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Ejemplo:

- $(1 + i)(2 + 3i) = (1.2 - 1.3) + (1.3 + 1.2)i = -1 + 5i$

IV. División

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

Ejemplo:

- $\frac{3 + 2i}{1 - 2i} = \frac{3.1 + 2(-2)}{(1)^2 + (-2)^2} + \frac{2.1 - 3(-2)}{(1)^2 + (-2)^2}i = -\frac{1}{5} + \frac{8}{5}i$

Nota

$Z\,.\,\bar{Z} = |Z|^2$

Problemas resueltos

1 Calcula: $K = i^{5^{5^5}}$

Resolución:

$5^{5^5} = 5^a = (\overset{\circ}{4} + 1)^a = \overset{\circ}{4} + 1 \Rightarrow K = i^{\overset{\circ}{4}+1} \qquad \therefore K = i$

2 Halla la parte real de $z = ((i-1)^{-1} + 1)^{-1}$; si $i = \sqrt{-1}$.

Resolución:

$z = \left(\dfrac{1}{i-1} + 1\right)^{-1} = \left(\dfrac{i}{i-1}\right)^{-1}$

$z = \dfrac{i-1}{i} = 1 - \dfrac{1}{i} = 1 - \dfrac{i}{i^2}$

$z = 1 + i$

Piden:
$Re(z) = 1$

3 Reduce:
$z_2 = \dfrac{(2-3i)(-1+5i)}{1+i}$

Resolución:

$z_2 = \dfrac{-2 + 10i + 3i - 15i^2}{1+i}$

$z_2 = \dfrac{-2 + 13i - 15(-1)}{1+i} = \dfrac{13 + 13i}{1+i}$

$z_2 = \dfrac{13(1+i)}{1+i} = 13$

$\therefore z_2 = 13$

4 Simplifica:
$k = \dfrac{1+i}{1-i} - \dfrac{1-i}{1+i}$

Resolución:

Sabemos que: $\dfrac{1+i}{1-i} = i \wedge \dfrac{1-i}{1+i} = -i \quad \therefore k = i - (-i) = 2i$

5 Halla $x - 2y$, si: $3yi + 3 + 2xi = 8i + x - 2i$; $\{x; y\} \subset \mathbb{R}$

Resolución:

De la igualdad: $3 + (3y + 2x)i = x + 6i$

Luego:
$\Rightarrow x = 3 \quad \wedge \quad 3y + 2x = 6$
$3y + 2(3) = 6$
$\Rightarrow y = 0 \qquad \therefore x - 2y = 3 - 2(0) = 3$

6 Calcula **n** si E es un número complejo real.
$E = \dfrac{3 + ni}{6 + 4i}$

Resolución:

$E = \dfrac{3 + ni}{6 + 4i}$

$E = \dfrac{(3 + ni)(6 - 4i)}{6^2 + 4^2}$

$E = \dfrac{18 - 12i + 6ni + 4n}{52}$

$E = \dfrac{18 + 4n}{52} + \dfrac{(6n - 12)i}{52}$

Por dato:
E debe ser un complejo real.
Luego: $\dfrac{6n - 12}{52} = 0$

$6n - 12 = 0$
$6n = 12$
$\therefore n = 2$

7 Calcula el módulo del siguiente complejo: $z = 5 + 4i$

Resolución:

Sabemos: si $z = a + bi \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$|z| = \sqrt{5^2 + 4^2}$

$|z| = \sqrt{25 + 16} \qquad \therefore |z| = \sqrt{41}$

8 Halla **n** si el siguiente número es imaginario puro.
$\dfrac{3 + 2ni}{4 - 3i}$

Resolución:

Sea: $z = \dfrac{3 + 2ni}{4 - 3i} = ki$; (imaginario puro)

$3 + 2ni = 4ki - 3ki^2$

$3 + 2ni = 3k + 4ki$

Donde: $3k = 3 \Rightarrow k = 1$
$2n = 4k \quad \therefore n = 2$

9 Halla el valor de **a** para que el siguiente cociente sea un número real.
$E = \dfrac{3 - 2ai}{4 - 3i}$

Resolución:

$E = \dfrac{(3 - 2ai)}{(4 - 3i)} \cdot \dfrac{(4 + 3i)}{(4 + 3i)} = \dfrac{12 + 6a + (9 - 8a)i}{4^2 - (3i)^2}$

Por dato: el cociente debe ser un número real.

Entonces: $E = \dfrac{12 + 6a}{25} + \underbrace{\dfrac{(9 - 8a)}{25}}_{0} i$

$\Rightarrow 9 - 8a = 0 \qquad \therefore a = \dfrac{9}{8}$

10 Halla el opuesto y conjugado del siguiente número complejo:
$M = 4 - 5i$

Resolución:

$M = a + bi \Rightarrow$ opuesto $= M^* = -a - bi$
conjugado $= \overline{M} = a - bi$

$\therefore \overline{M} = 4 + 5i \quad \wedge \quad M^* = -4 + 5i$

11 Calcula $z = a + bi$, si $Im(z) = 2Re(z)$ y $\left|\dfrac{z-1}{z-7}\right| = 1$

Resolución:

$\left|\dfrac{z-1}{z-7}\right| = 1 \Rightarrow |z - 1| = |z - 7|$

$|(a - 1) + bi| = |(a - 7) + bi|$

$\sqrt{(a-1)^2 + b^2} = \sqrt{(a-7)^2 + b^2}$

$a^2 - 2a + 1 = a^2 - 14a + 49$

$12a = 48 \Rightarrow a = 4$

Además: $b = Im(z) = 2Re(z) = 2(4)$
$b = 8$

$\therefore z = a + bi = 4 + 8i$





UNIDAD 3

ECUACIONES DE PRIMER GRADO PLANTEO DE ECUACIONES

SOLUCIÓN O RAÍZ DE UNA ECUACIÓN ALGEBRAICA

Es aquel valor que toma la variable y que verifica una determinada ecuación.

Ejemplo:

En la siguiente ecuación: $\underbrace{10x - 30}_{1.^{er}\text{ miembro}} = \underbrace{x + 60}_{2.^{\circ}\text{ miembro}}$

$x = 10$, es una solución o raíz de la ecuación, ya que: $10(10) - 30 = 10 + 60$

Resolver una ecuación consiste en hallar todas las soluciones de dicha ecuación.

Tipos de ecuaciones

Ecuaciones algebraicas
Una ecuación algebraica en **x** contiene solo expresiones algebraicas como polinomios, expresiones racionales, radicales u otros.

Así:

$x^2 - 3x + 1 = 0$ Ec. polinomial

$\dfrac{10}{x-1} + \dfrac{3}{2x+1} = 0$ Ec. fraccionaria

$\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x-1} = 0$ Ec. irracional

Ecuaciones no algebraicas

$3^x - x^3 - 2 = 0$ Ec. exponencial

$2\log x - 1 = 0$ Ec. logarítmica

$\tan x - 1 = 0$ Ec. trigonométrica

ECUACIONES EQUIVALENTES

Llamamos ecuaciones equivalentes a un conjunto de ecuaciones que tienen exactamente las mismas soluciones.

Ejemplo:

Sea la ecuacion:

- $$\begin{aligned} \frac{x+3}{2} &= \frac{x}{5} - 3 \\ \frac{x+3}{2} - \frac{x}{5} &= -3 \\ 5x + 15 - 2x &= -30 \\ 3x &= -45 \\ x &= -15 \end{aligned}$$

Generalmente para resolver ecuaciones, elaboramos una lista de ecuaciones equivalentes (cada una más sencilla que la precedente), terminando con una ecuación cuya solución podemos hallarla con facilidad.

PRINCIPIOS GENERALES PARA LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES

1. Si sumamos o restamos una misma expresión (numérica o algebraica definida) en ambos miembros de la ecuación, obtendremos otra ecuación equivalente a la primera.

   Ejemplo:
   En la ecuación real: $9x - 7 = 6x + 5$
   Restamos a ambos miembros la expresión 6x, asimismo, sumamos a ambos miembros 7 y obtenemos la ecuación equivalente; veamos:

   $$(9x - 6x) - 7 + 7 = (6x - 6x) + 5 + 7$$

   (Ecuación equivalente) $3x = 12$, solución: $x = 4$

2. Si multiplicamos o dividimos ambos lados de una ecuación por una expresión que representa un número real distinto de cero; en esta situación suceden dos casos:

   a) Si dicha expresión es un valor constante, tanto para la multiplicación y división, tendremos en este caso ecuaciones equivalentes.

   b) Si la expresión contiene una incógnita, es posible que se introduzcan soluciones extrañas para el caso de la multiplicación y eliminando o cancelando soluciones para el caso de la división.

Atención

Una igualdad es la relación de dos expresiones las cuales se verifican para un mismo valor.

Así: $A = B$

Existen dos clases de igualdades:

- **Absolutas** (identidades)
  Verifica siempre para cualquier valor de sus variables.

  Así:

  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
  Si: $a = 5 \wedge b = 2$
  $\Rightarrow (5 + 2)(5 - 2) = 5^2 - 2^2$
  $21 = 21$

- **Relativas** (ecuaciones)
  Verifica solo para algunos valores atribuidos a su variable.

  Así:

  $7x + 2 = 3x - 2$
  Verifica solo para: $x = -1$





ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Se denomina así a aquella ecuación polinomial de una variable, que se reduce a la siguiente forma general:

$ax + b = 0$ donde despejando la variable **x** obtenemos: $x = -\frac{b}{a}$

Análisis de la ecuación: ax + b = 0

I. Si: $a \neq 0 \wedge b \neq 0$, la ecuación es:
compatible determinada y su solución:

$$x = -\frac{b}{a} \text{ es única.}$$

II. Si: $a = 0 \wedge b \neq 0$, la ecuación es:
incompatible y no tiene solución: $x \in \{\}$ o $x \in \varnothing$

Ejemplos:

1. Halla el valor de x en la ecuación: $\frac{3x+1}{2x-1} = \frac{3}{7}$

Resolución:

Multiplicamos en forma conveniente por 7(2x – 1); donde $x \neq \frac{1}{2}$, miembro a miembro quedandonos:

$$7(3x + 1) = 3(2x - 1)$$

$$21x + 7 = 6x - 3$$

Transponemos términos: $21x - 6x = -3 - 7$

Despejamos la variable: $15x = -10$

$$x = -\frac{2}{3}$$

La solución de la ecuación compatible determinada es: $-\frac{2}{3}$

2. Da el valor de x en: $\frac{x+1}{6} + \frac{3x+1}{3} = \frac{x+2}{2} + \frac{2x-3}{3}$

Resolución:

Multiplicando ambos miembros por el MCM de los denominadores (6): $x + 1 + 2(3x + 1) = 3(x + 2) + 2(2x - 3)$

$$x + 1 + 6x + 2 = 3x + 6 + 4x - 6$$

En ambos miembros, reducimos términos semejantes: $7x + 3 = 7x + 0$

Transponemos términos: $7x - 7x = -3$

Hallamos el valor de la incógnita: $0x = -3 \Rightarrow x \in \varnothing$

La ecuación es incompatible, no tiene solución, ya que no existe algún número que multiplicado por cero nos da como resultado tres.

3. Resuelve la siguiente ecuación: $(x + 2)^2 + (x + 3)^2 + 5x = (x - 1)^2 + (x - 7)^2$

Resolución:

Desarrollamos cada binomio al cuadrado: $(x^2 + 4x + 4) + (x^2 + 6x + 9) + 5x = (x^2 - 2x + 1) + (x^2 - 14x + 49)$

Reducimos términos semejantes en ambos miembros de la ecuación: $2x^2 + 15x + 13 = 2x^2 - 16x + 50$

La transposición de término es equivalente a decir: restamos $\mathbf{2x^2}$ a ambos miembros de la ecuación, a su vez, sumamos 16x a ambos miembros de la ecuación y por último restamos 13 a ambos miembros de la ecuación:

$$\underbrace{2x^2 - 2x^2}_{=0} + 15x + 16x + \underbrace{13 - 13}_{=0} = \underbrace{2x^2 - 2x^2}_{=0} \underbrace{- 16x + 16x}_{=0} + 50 - 13$$

$$31x = 37$$

Atención

Las ecuaciones atendiendo a sus tipos de soluciones se clasifican en:

- **Compatibles**
  Cuando por lo menos tienen una solución.Además, estas se subdividen en:

  Determinadas
  Si tiene un número finito de soluciones.

  Indeterminadas
  Si tiene un número infinito de soluciones.

- **Incompatibles o absurdas**
  Aquellas que no tienen solución.



Nota

Si se multiplica a ambos miembros por una expresión, estos deben considerarse diferente de cero:

Por ello, en el ejemplo 1:

$2x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$

Nota

Si hay denominadores con valores constantes, los eliminamos todos multiplicando por el MCM (mínimo común múltiplo) de los denominadores a ambos lados de la ecuación.

Recuerda

Los pasos a seguir para resolver ecuaciones:

PASO 1

Desarrolla las diferentes operaciones indicadas relacionadas con la variable.

PASO 2

Reduce términos semejantes en cada miembro de la ecuación.

PASO 3

Realiza la transposición de términos.

PASO 4

Despeja la variable luego de reducir términos semejantes.



Despejamos la variable, en este caso dividimos ambos miembros entre 31: $\frac{31x}{31} = \frac{37}{31}$

La solución de la ecuación compatible determinada es: $\frac{37}{31}$

PLANTEO DE ECUACIONES

En el planteo de ecuaciones el punto clave es el de INTERPRETAR Y TRANSFORMAR ENUNCIADOS verbales a un conjunto simbólico que contienen variables, signos de colección y signos de operación.

Números enteros consecutivos

Representación: $x;\ x+1;\ x+2;\ x+3;\ \ldots\ ;\ x \in \mathbb{Z}$

Ejemplos:

1. Escribe cinco números enteros consecutivos, empezando con el 3.

   Resolución:

   x; x + 1; x + 2; x + 3; x + 4

   3; 4 ; 5 ; 6 ; 7

2. La suma de dos números enteros consecutivos es 11. Determina el mayor.

   Resolución:

   Interpretamos y transformamos el enunciado:

   $\underbrace{\text{La suma de dos números enteros consecutivos}}_{x + (x+1)}\ \underbrace{\text{es}}_{=}\ \underbrace{11}_{11}.$

   $x + (x + 1) = 11$

   $2x + 1 = 11 \Rightarrow x = 5$

   El mayor de los números:

   $x + 1 = 5 + 1 = 6$

3. La suma de seis números cosecutivos dan como resultado $N = \overline{8a}$; donde N es un cuadrado perfecto, determina el segundo número.

   Resolución:

   Sean los números: $x;\ x+1;\ x+2;\ x+3;\ x+4;\ x+5$

   La suma: $6x + 15$

   dato: $6x + 15 = \overline{8a} = 81$ (cuadrado perfecto) $\Rightarrow 6x = 66 \Rightarrow x = 11$

   Piden: $x + 1 = 12$

EFECTUAR

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $(6x + 7)(5x - 4) = 6(5x^2 - 1)$
2. $2x + 19 = \frac{7x}{3} + 5$
3. $\frac{5}{2x} + \frac{2}{3x} = \frac{95}{2x^2}$
4. $\frac{9}{5x - 13} + \frac{2}{3} = 1$
5. $\frac{x}{3} + \frac{2x}{5} = 2 + \frac{10x}{15}$
6. $\frac{x}{2} - x = \frac{x}{4} - 9$
7. $3 + \frac{3x}{7} - \frac{2x}{15} = \frac{x}{3} + \frac{13}{3}$
8. $\frac{x+3}{4} - \frac{x-1}{2} = \frac{x}{6} + 1$
9. $7x - 7 = 1 - x$
10. $5x - 7 = 101x - 103$
11. $3x - 1 = x + 2 + x$
12. $5x - \frac{1}{2} = x + \frac{9}{2}$
13. $x + \frac{3}{2} = 3x - 1$



Problemas resueltos

1 Resuelve:

$$\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}(x-1)$$

Resolución:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{4x+1}{4}\right)=\frac{1}{4}(x-1)$$

$$\frac{2x+1}{4}+\frac{4x+1}{12}=\frac{x-1}{4}$$

$$\frac{6x+3+4x+1}{12}=\frac{x-1}{4}$$

$$10x+4=3x-3$$

$$7x=-7$$

$$x=-1$$

$$\therefore\ CS=\{-1\}$$

2 Resuelve:

$$\frac{x-1}{3}+\frac{x-2}{6}+\frac{x-3}{9}=\frac{x-4}{12}$$

Resolución:

Determinamos el común denominador: 36

$$\frac{12(x-1)+6(x-2)+4(x-3)}{36}=\frac{x-4}{12}$$

$$12x-12+6x-12+4x-12=3(x-4)$$

$$22x-36=3x-12$$

$$19x=24\qquad \therefore\ x=\frac{24}{19}$$

3 Resuelve:

$$\left[\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left[\frac{x}{3}-1\right]-1\right]-1\right]-1\right]-1=0\right.$$

Da el valor de: $x+1$

Resolución:

$$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left[\frac{x}{3}-1\right]-1\right]-1\right]-1\right]-1=0$$

$$3\times\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left[\frac{x}{9}-\frac{1}{3}-1\right]-1\right]-1\right]=1\times 3$$

$$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x}{9}-\frac{4}{3}\right)-1\right]-1=3$$

$$3\times\frac{1}{3}\left[\frac{x}{27}-\frac{4}{9}-1\right]=4\times 3$$

$$\frac{x}{27}-\frac{13}{9}=12$$

$$\frac{x}{27}=\frac{121}{9}$$

$$\Rightarrow\ x=363$$

$\therefore$ Piden: $x+1=364$

4 Determina **m** si la ecuación: $mx+m^2=m(m-1)+2$ presenta como solución a 3.

Resolución:

Sabemos que $x=3$.

Reemplazamos:

$3m+m^2=m^2-m+2$

$3m+m=2$

$4m=2$

$m=\frac{2}{4}$

$\therefore\ m=0,5$

5 Calcula **m**, si la ecuación: $mx+3=2x+4$; es incompatible.

Resolución:

$mx+3=2x+4$

$mx-2x=1$

$(m-2)x=1$

$x=\frac{1}{m-2}$

Si es incompatible:

$m-2=0\Rightarrow\ m=2$

6 En un examen de 70 preguntas, por cada respuesta correcta se gana 5 puntos y por cada respuesta incorrecta se pierde 2 puntos. ¿Cuántas respuestas correctas tuvo Luis, si obtuvo 140 puntos?

Resolución:

n.º preguntas correctas: C ; n.º preguntas incorrectas: 70 – C

$\Rightarrow\ 5\,.\,C-2\,.\,(70-C)=140$

$5C-140+2C=140$

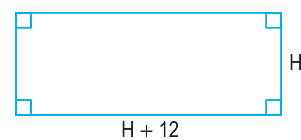
$7C=280$

$C=40$

$\therefore$ n.º preguntas correctas es 40.

7 La base de un rectángulo es 12 m mayor que su altura. Si el perímetro es 64 m, encuentra las dimensiones.

Resolución:



Perímetro = 64 m

Suma de lados del rectángulo = 64 m

$\Rightarrow 2H+2(H+12)=64$

$H+H+12=32$

$\Rightarrow H=10$ m

Dimensiones del rectángulo:

- Altura: H = 10 m
- Base: H + 12 = 10 + 12 = 22 m

Nota

- EL ORDEN DE UNA MATRIZ está dado por la representación m × n donde:

m: número de filas
n: número de columnas.

Luego, para los ejemplos citados:

A es una matriz de orden 2 × 3.
B es una matriz de orden 3 × 3.

- A las matrices se les encierra entre paréntesis o corchetes:

$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -10 & 9 & 9 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -10 & 9 & 9 \end{bmatrix}$

Recuerda

- Una matriz cuadrada es aquella donde el número de filas es igual al número de columnas.

$M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 10 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & \sqrt{3} & 15 \end{bmatrix}$ (Diagonal secundaria; Diagonal principal)

M es una matriz de orden 3 × 3 o simplemente una matriz de orden 3.



Observaciones

- La regla de **LAPLACE (menores complementarios)** se utiliza para hallar determinantes de cualquier orden.
- Para aplicar la regla de LAPLACE, se recomienda elegir la fila (o columna) que presente más ceros.

MATRIZ

Es un arreglo rectangular de elementos dispuestos en filas y columnas. Para representar a una matriz se utilizan letras mayúsculas.

Ejemplos:

$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 3 \\ 15 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3}$ — filas: f_1, f_2; columnas: c_1, c_2, c_3; Orden de la matriz

$B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 18 \\ 8 & 10 & 3 \\ \sqrt{7} & 20 & 21 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ — filas: f_1, f_2, f_3; columnas: c_1, c_2, c_3; Orden de la matriz

Igualdad de matrices

Dadas las matrices del mismo orden (2 × 3):

$M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ m_4 & m_5 & m_6 \end{pmatrix}_{2\times 3} \quad \wedge \quad N = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ n_4 & n_5 & n_6 \end{pmatrix}_{2\times 3}$

Estas matrices serán iguales (M = N) si sus elementos correspondientes son iguales. Así:

$m_1 = n_1$; $m_2 = n_2$; $m_3 = n_3$
$m_4 = n_4$; $m_5 = n_5$; $m_6 = n_6$

DETERMINANTE

Es la relación funcional que aplicada a una matriz cuadrada la transforma en un escalar (número real). Se le representa encerrando los elementos de la matriz entre dos barras verticales:

Notación: |A|; D(A); Det(A)

Desarrollo de un determinante de orden 2

De la matriz de orden 2:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ (con signo cambiado (–); con su propio signo (+)) $\Rightarrow$ $|A| = ad - bc$

Desarrollo de un determinante de orden 3 por menores complementarios

De la matriz de orden 3:

$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ ⇒ Siempre toma en cuenta los signos “asumidos” a la matriz: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

Ahora:

- Elige una fila o columna (cualesquiera) la que se llamará: línea fija.
- Cada elemento de la línea elegida es multiplicado por un determinante cuyos elementos están fuera de las líneas fija y móvil.

Ejemplo:

- Calcula el determinante de: $\begin{vmatrix} -7 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

Resolución:

- Cuadro de signos: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$ (c_2)
- Tomamos como referencia la segunda columna (c_2).



- $\begin{vmatrix} -7 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -7 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -7 & -1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$

$$= -3(1(3) - 2(6)) - 4((-7)6 - (-1)1) = -3(3 - 12) - 4(-42 + 1) = 191$$

Resuelve el mismo ejemplo, pero ahora tomando como referencia la segunda fila (debes obtener el mismo valor de la determinante).

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Es el conjunto de ecuaciones que se verifican simultáneamente para los mismos valores de sus incógnitas.

Representación normal: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ Donde: a_1, b_1, c_1 y $a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$.

Interpretación geométrica

A) Sistema compatible (consistente)

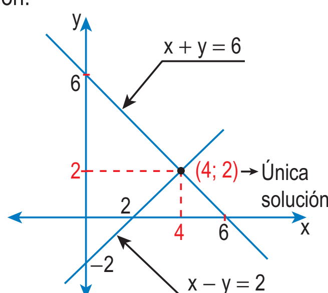
Cuando existe solución: si las rectas se cortan, el sistema lineal tiene una única solución dado por la intersección de estas. En este caso las ecuaciones son independientes.

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

Ejemplo:

Resuelve: $x + y = 6$
$x - y = 2$

Resolución:



B) Sistema compatible indeterminado

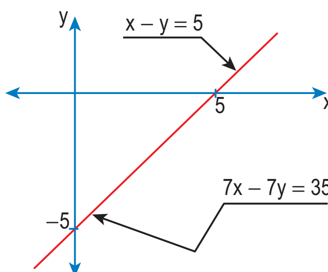
Cuando existe más de una solución: si las rectas son coincidentes el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones que están representadas por todos los puntos de la recta. En este caso las ecuaciones son dependientes.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Ejemplo:

Resuelve: $x - y = 5$
$7x - 7y = 35$

Resolución:



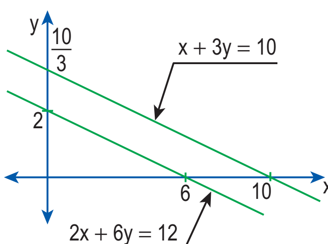
C) Sistema incompatible (imposible, absurdo, inconsistente)

Cuando no tiene solución: si las rectas son paralelas el sistema de ecuaciones no tiene solución, en este caso las rectas nunca se cortan (no hay puntos en común). En este caso las ecuaciones son independientes.

Ejemplo: $$\frac{a_1}{b_1} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

Resuelve: $x + 3y = 10$
$2x + 6y = 12$

Resolución:



RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE PRIMER GRADO

1. Método de sustitución

Ejemplo:

Se define la operación * mediante: $x*y = x + y + xy$

Entonces la solución del sistema de ecuaciones:

$1*x + (-1)*y = 6$
$2*x + 3*y = 2$ es:

Atención

- Cada elemento de la línea fija es multiplicada por el determinante que resulta de eliminar la fila y columna correspondientes al elemento:

Del ejemplo:

1.° elemento línea fija: 3

$\begin{vmatrix} -7 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

2.° elemento línea fija: 0

$\begin{vmatrix} -7 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -7 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

3.° elemento línea fija: 4

$\begin{vmatrix} -7 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -7 & -1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$



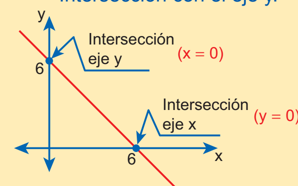
Recuerda

- Para graficar rectas en el plano xy solo tienes que encontrar las intersecciones de las rectas con los ejes x e y, respectivamente.

Así:

Para: $x + y = 6$

1. Hacemos $y = 0 \Rightarrow x = 6$
   Intersección con el eje x.
2. Hacemos $x = 0 \Rightarrow y = 6$
   Intersección con el eje y.



Nota

- **Conjunto solución** es el conjunto de valores que toman las incógnitas para los cuales se verifica el sistema.
  Así para los ejemplos mostrados en la interpretación geométrica:

A. CS = {(4; 2)}
B. CS = R
C. CS = ∅ (conjunto vacío)

Resolución:

Hacemos uso del operador * formamos el sist. lineal:

$1*x + (-1)*y = 6$

$1 + x + 1(x) + -1 + y + (-1)y = 6$

$1 + x + x - 1 + y - y = 6$

$2x = 6$

$\Rightarrow x = 3$ ...(1)

$2*x + 3*y = 2$

$2 + x + 2x + 3 + y + 3y = 2$

$\Rightarrow 3x + 4y = -3$ ...(2)

El sistema lineal está formado por las ecuaciones (1) y (2):

$x = 3$ ...(1)

$3x + 4y = -3$ ...(2)

Sustituyamos (1) en la ecuación (2):

$3(3) + 4y = -3$

$4y = -9 - 3$

$y = -3$

$\therefore$ CS = {(3; –3)}

Nota

- Los **sistemas equivalentes** son aquellos que a pesar de tener ecuaciones diferentes aceptan las mismas soluciones.
- Se denomina **ecuaciones independientes** si los coeficientes de una misma incógnita no son proporcionales.

2. Método de igualación

Ejemplo:

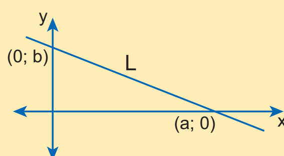
Si se cumple que: $mx + my + nx - ny - 15x - 7y = 0$ para todo valor real de x e y. Entonces el valor de mn es:

Resolución:

- Con la condición del problema formaremos nuestro sistema de primer grado:
  Como x e y puede tomar cualquier valor real; asumimos por conveniencia:
  1.° $x = 0$, $y = 1$
  2.° $x = 1$, $y = 0$
  $mx + my + nx - ny - 15x - 7y = 0$ ...(1)
- Haciendo $x = 0$; $y = 1$ en (1):
  $m(0) + m(1) + n(0) - n(1) - 15(0) - 7(1) = 0$
  $0 + m + 0 - n - 0 - 7 = 0$
  $m - n = 7$ ...(2)
- Haciendo $x = 1$; $y = 0$ en (1):
  $m(1) + n(0) + n(1) - n(0) - 15(1) - 7(0) = 0$
  $m + 0 + n - 0 - 15 - 0 = 0$
  $m + n = 15$ ...(3)
- Despejando de las ecuaciones (2) y (3) la variable m:
  $m = 7 + n$ ...(4)
  $m = 15 - n$ ...(5)
- Las dos expresiones (4) = (5) de la variable despejada:
  $7 + n = 15 - n$
  $2n = 8$
  $n = 4$ ...(6)
- Sustituimos el valor de n en (4):
  $m = 7 + n$
  $m = 7 + 4$
  $m = 11$
- Nos piden el valor de m . n:
  $\therefore$ m . n = 11 . 4 = 44

Atención

Ecuación simétrica de una recta no vertical.
Se tiene la recta no vertical que corta a los ejes en los puntos (a; 0) y (a; b).



Tiene como ecuación:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Ecuación simétrica de la recta L.



3 Método de reducción

Ejemplo:

Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Si AB = C, entonces el valor de $a - b + c - d$ es:

Resolución:

- De la condición AB = C
  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
  $$\begin{pmatrix} a + c & b + d \\ a + 3c & b + 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- Las matrices son iguales entonces sus elementos correspondientes también serán iguales:
  $a + c = 1$ ...(1)
  $b + d = 0$ ...(2)
  $a + 3c = 0$ ...(3)
  $b + 3d = 1$ ...(4)
- Desarrollamos el sistema formado por (1) y (3):
  1.er sistema $\begin{cases} a + c = 1 & ...(1) \\ a + 3c = 0 & ...(3) \end{cases}$
- Multiplicamos la ecuación (1) por (–3) miembro a miembro:
  $-3a - 3c = -3$ ...(5)
  $a + 3c = 0$ ...(3)
- Sumamos miembro a miembro las ecuaciones (5) y (3):
  $-2a = -3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$ ...(6)
- Sustituyamos la solución obtenida (6) en (1):
  $a + c = 1$
  $\frac{3}{2} + c = 1 \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$
- Hacemos lo mismo para el sistema formado ahora por (2) y (4):
  2.° Sistema $\begin{cases} b + d = 0 & ...(2) \\ b + 3d = 1 & ...(4) \end{cases}$
  Se deja para el alumno hacer los pasos (3), (4), (5) y (6):
  $b = -\frac{1}{2} \wedge d = \frac{1}{2}$
- Nos piden: $a - b + c - d = \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$
  $= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1$

Atención

- Para multiplicar matrices considera el siguiente procedimiento:
  Sean A y B matrices cuadradas de orden 2:
  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \wedge B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & k \end{pmatrix}$
  $$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bk \\ ce + dg & cf + dk \end{pmatrix}$$



Problemas resueltos

1 Resuelve el sistema:

$5x + 3y = 36$

$7x + y = 28$

Luego halla m, si cumple: $mx + (m + 1)y = 37$

Resolución:

$5x + 3y = 36 \quad ...(1)$

$7x + y = 28 \quad ...(2)$

Multiplicamos por 3 a (2):

$$\begin{array}{r} 5x + 3y = 36 \\ 21x + 3y = 84 \\ \hline -16x = -48 \\ x = 3 \end{array} \quad \downarrow (-)$$

Evaluamos x = 3 en (2):

$7(3) + y = 28$

$y = 7$

Reemplazamos:

$\Rightarrow m(3) + (m + 1)(7) = 37$

$3m + 7m + 7 = 37$

$10m = 30$

$\therefore m = 3$

2 Calcula (x + y) en:

$3x + 7y = 17$

$2x + 5y = 12$

Resolución:

$3x + 7y = 17 \quad ...(1)$

$2x + 5y = 12 \quad ...(2)$

Multiplicamos por 3 a (2) y por 2 a (1):

$$\begin{array}{r} 6x + 14y = 34 \\ 6x + 15y = 36 \\ \hline -y = -2 \\ y = 2 \end{array} \quad \downarrow (-)$$

Evaluamos el valor de y en (2):

$2x + 5(2) = 12$

$2x = 2$

$x = 1$

$\therefore x + y = 2 + 1 = 3$

3 Calcula x:

$9y - 2(x + 1) = 17$

$12y + (x + 1) = 41$

Resolución:

$9y - 2(x + 1) = 17$

$12y + (x + 1) = 41$

$\Rightarrow 9y - 2x - 2 = 17$

$9y - 2x = 19 \quad ...(1)$

$\Rightarrow 12y + x + 1 = 41$

$12y + x = 40 \quad ...(2)$

Multiplicamos por 2 a (2):

$2 . (12y + x) = 2 . 40$

$24y + 2x = 80 \quad ...(3)$

De (1) y (3):

$$\begin{array}{r} 9y - 2x = 19 \\ 24y + 2x = 80 \\ \hline 33y = 99 \\ y = 3 \end{array} \quad \downarrow (+)$$

Luego y = 3 en (2):

$12(3) + x = 40$

$\therefore x = 4$

4 Calcula (y – x) en:

$\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 5 \qquad \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 7$

Resolución:

$\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 5 \quad ...(1); \qquad \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 7 \quad ...(2)$

Operamos (1) y (2) resulta:

$5x + 2y = 50 \quad ...(3)$

$2x + 3y = 42 \quad ...(4)$

Multiplicamos por 2 a (4) y por 3 a (3):

$$\begin{array}{r} 15x + 6y = 150 \\ 4x + 6y = 84 \\ \hline 11x = 66 \\ x = 6 \end{array} \quad \downarrow (-)$$

Evaluamos x = 6 en (4):

$2(6) + 3y = 42$

$3y = 30$

$y = 10$

$\therefore y - x = 10 - 6 = 4$

5 Calcula m:

$14m + n = 15$

$8m - 3n = 5$

Resolución:

$14m + n = 15 \quad ...(1)$

$8m - 3n = 5 \quad ...(2)$

Multiplicamos por 3 a (1):

$$\begin{array}{r} 42m + 3n = 45 \\ 8m - 3n = 5 \\ \hline 50m = 50 \\ m = 1 \end{array} \quad \downarrow (+)$$

6 Calcula x:

$2(x + 1) + 3(y - 1) = 13$

$4(x + 1) - 8(y - 1) = 12$

Resolución:

$2(x + 1) + 3(y - 1) = 13$

$4(x + 1) - 8(y - 1) = 12$

$\Rightarrow 2x + 2 + 3y - 3 = 13$

$2x + 3y = 14 \quad ...(1)$

$\Rightarrow 4x + 4 - 8y + 8 = 12$

$4x - 8y = 0 \quad ...(2)$

Multiplicamos por 8 a (1) y por 3 a (2):

$$\begin{array}{r} 16x + 24y = 112 \\ 12x - 24y = 0 \\ \hline 28x = 112 \\ x = 4 \end{array} \quad \downarrow (+)$$

7 Calcula x:

$12x + 4y = 40$

$8x - 9y = 15$

Resolución:

$12x + 4y = 40 \quad ...(1)$

$8x - 9y = 15 \quad ...(2)$

Multiplicamos por 9 a (1) y por 4 a (2):

$$\begin{array}{r} 108x + 36y = 360 \\ 32x - 36y = 60 \\ \hline 140x = 420 \\ x = 3 \end{array} \quad \downarrow (+)$$

8 Halla x:

$4x + 5y = 29$

$6x + y = 37$

Resolución:

$4x + 5y = 29 \quad ...(1)$

$6x + y = 37 \quad ...(2)$

Multiplicamos por 6 a (1) y por 4 a (2):

$$\begin{array}{r} 24x + 30y = 174 \\ 24x + 4y = 148 \\ \hline 26y = 26 \\ y = 1 \end{array} \quad \downarrow(-)$$

Evaluamos y = 1 en (2):

$6x + 1 = 37$

$6x = 36$

$x = 6$

9 Resuelve:

$$\begin{vmatrix} x+1 & x \\ x & x+2 \end{vmatrix} = 11$$

Resolución:

$(x + 1)(x + 2) - x^2 = 11$

$x^2 + 2x + x + 2 - x^2 = 11$

$3x = 9$

$\therefore x = 3$

10 Halla el determinante de:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Resolución:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = -2\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$|A| = -2(3) + 0 - 1(7)$

$\therefore |A| = -13$

11 Resuelve por el método de sustitución:

$6x + 3y = 5$ ...(1)

$3x + 12y = 13$ ...(2)

Resolución:

De la primera ecuación tenemos:

$6x + 3y = 5$

$3y = 5 - 6x$

$y = \dfrac{5 - 6x}{3}$ ...(3)

Sustituyamos en la ecuación (2):

$3x + 12\left(\dfrac{5 - 6x}{3}\right) = 13$

$3x + 4(5 - 6x) = 13$

$3x + 20 - 24x = 13$

$21x = 7$

$\Rightarrow x = \dfrac{1}{3}$

Luego reemplazamos el valor de x en (3):

$y = \dfrac{5 - 6x}{3}$

$y = \dfrac{5}{3} - 2\left(\dfrac{1}{3}\right)$

$y = 1$

Entonces:

$x = \dfrac{1}{3} \wedge y = 1$

12 Halla y por el método de igualación:

$4x + 3y = 7$

$7x - 5y = 43$

Resolución:

$4x + 3y = 7 \Rightarrow x = \dfrac{7 - 3y}{4}$

$7x - 5y = 43 \Rightarrow x = \dfrac{43 + 5y}{7}$

$\dfrac{7 - 3y}{4} = \dfrac{43 + 5y}{7}$

$49 - 21y = 172 + 20y$

$-41y = 123 \Rightarrow y = -3$

13 Resuelve:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + y = -3 \end{cases}$$ e indica xy^2.

Resolución:

Aplicamos el método de sustitución, en el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 & ...(1) \\ x + 2y = -3 & ...(2) \end{cases}$$

De la ecuación (2) despejamos x: $x = -3 - 2y$

Ahora reemplazamos en la ecuación (1):

$2(-3 - 2y) - y = 4$

$-6 - 4y - y = 4$

$-5y = 10 \Rightarrow y = -2$

Ahora, sustituimos este valor en la ecuación (1):

$2x - (-2) = 4$

$2x + 2 = 4 \Rightarrow x = 1$

$\therefore xy^2 = 1(-2)^2 = 4$

14 Resuelve:

$$\begin{cases} 2y - x = 1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$ e indica x^2y^2.

Resolución:

Por el método de igualación:

$$\begin{cases} 2y - x = 1 & ...(1) \\ 2x + y = 8 & ...(2) \end{cases}$$

De la ecuación (1) despejamos y:

$y = \dfrac{1 + x}{2}$

De la ecuación (2) despejamos y: $y = 8 - 2x$

Igualamos las dos ecuaciones, tenemos:

$\dfrac{1 + x}{2} = 8 - 2x \Rightarrow 1 + x = 16 - 4x$

$5x = 15 \Rightarrow x = 3$

Reemplazamos este valor en la ecuación (1):

$2y - 3 = 1 \Rightarrow y = 2$

$\therefore x^2y^2 = 3^2 . 2^2 = 36$



ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO PLANTEO DE ECUACIONES

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Son aquellas que se adecuan a la expresión:

$ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$ Donde:

a: coeficiente principal
ax^2: término cuadrático
bx: término lineal
c: término independiente

Cálculo de las soluciones de la ecuación incompleta

I. De la forma: $ax^2 + c = 0$

Ejemplo: determina las soluciones de la ecuación $3x^2 - 147 = 0$

- Simplificamos coeficientes: $x^2 - 49 = 0$
- Despejamos la variable: $x^2 = 49$
- Sacamos raíz cuadrada: $x = \pm 7$
- Soluciones: $x_1 = -7 \vee x_2 = 7$

Otro procedimiento

- Luego de simplificar coeficientes: $x^2 - 49 = 0$
- Por diferencia de cuadrados: $(x + 7)(x - 7) = 0$
- Cada factor igualamos a cero: $x + 7 = 0 \vee x - 7 = 0$
- Soluciones: $x_1 = -7 \vee x_2 = 7$

II. De la forma: $ax^2 + bx = 0$

Ejemplos: resuelve las ecuaciones

1. $15x^2 + 35x = 0$
   - Simplificamos coeficientes: $3x^2 + 7x = 0$
   - Extraemos factor común x: $x(3x + 7) = 0$
   - El producto es cero, esto indica que cualquiera de sus factores es cero:
     $x = 0 \vee 3x + 7 = 0$
     $x = 0 \vee x = -\frac{7}{3}$
   - Soluciones: $x_1 = 0 \vee x_2 = -\frac{7}{3}$

2. $-17x^2 + 10x = 0$
   - Multiplicamos por (–1): $17x^2 - 10x = 0$
     $x(17x - 10) = 0$
     $\Rightarrow x = 0 \vee 17x - 10 = 0$
   - Soluciones:
     $x_1 = 0 \vee x_2 = \frac{10}{17}$

Cálculo de las soluciones de la ecuación completa

De la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad ; \; a \neq 0$$

I. Por factorización (aspa simple)

Luego de emplear el aspa simple quedan dos factores, cada uno de ellos se iguala a cero, resultando de esta manera las dos soluciones.

Ejemplo:

Resuelve: $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} = \frac{1}{5} + \frac{3x}{5}$

Resolución:

- Multiplicamos en aspa el primer miembro de la ecuación y factorizamos $\frac{1}{5}$ en el segundo:
  $\frac{6x^2 + 2x}{12} = \frac{1}{5}(1 + 3x)$
- Lo que divide pasa al otro lado de la ecuación a multiplicar:
  $30x^2 + 10x = 12 + 36x$
- Reducimos términos semejantes y dividimos entre dos:
  $15x^2 - 13x - 6 = 0$
- Factorizamos por el aspa simple:
  $15x^2 - 13x - 6 = 0$
  $3x \qquad +1 \quad +5x$
  $5x \qquad -6 \quad -18x$
  $\qquad\qquad\qquad -13x$
- Los factores igualamos a cero:
  $3x + 1 = 0 \vee 5x - 6 = 0$
- Soluciones:
  $x_1 = -\frac{1}{3} \vee x_2 = \frac{6}{5}$

Nota

- A las ecuaciones de segundo grado también se les denomina **ecuaciones cuadráticas.**
- **Ecuación de 2.° grado**

  Completa:
  $ax^2 + bx + c = 0$

  Incompletas:
  $ax^2 = 0$
  $ax^2 + bx = 0$
  $ax^2 + c = 0$

Observación

- Todas las soluciones en estas ecuaciones se darán en los reales.

  $x^2 = -3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-3}$ (No es un número real)

  $\Rightarrow$ No tiene solución en $\mathbb{R}$.



Recuerda

Discriminante $(\Delta) = b^2 - 4ac$

Si:

$\Delta > 0 \Rightarrow x_1 \neq x_2;\ x_1 \wedge x_2 \in \mathbb{R}$
$\Delta < 0 \Rightarrow x_1 \text{ y } x_2 \in \mathbb{C}$
$\Delta = 0 \Rightarrow x_1 = x_2;\ x_1 \wedge x_2 \in \mathbb{R}$



Observación

Del ejemplo, observamos que:

$x_1 = 1 \vee x_2 = -\frac{1}{5}$

$x_1 \neq x_2$

Se concluye:

Si: $\Delta > 0$ las raíces que se obtiénen son reales y diferentes.



Nota

Expresión general de la ecuación cuadrática:

$ax^2 + bx + c = 0$

Atención

La representación de 2 números ($\mathbb{Z}^+$) consecutivos impares se da como:

$2x - 1 \ ; \ 2x + 1$

o también:

$x \ ; \ x + 2$
$\forall$ x: impar



Observación

- En el último ejemplo, nota la diferencia:
  $\Rightarrow$ El 2.° número es multiplicado por 3, más que el 1.°.
  $3(2N - 5) + N$
  $\Rightarrow$ El 2.° número es multiplicado por 3 más que el 1.°
  $3((2N - 5) + N)$

II. Por aplicación de la fórmula general

Se recurre a esta forma cuando el trinomio no es factorizable por el método del aspa simple.

Fórmula de Carnot: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Ejemplo:

Determina el conjunto solución de: $5x^2 = 1 + 4x$

Resolución:

- Adecuamos a la expresión general:
  $5x^2 - 4x - 1 = 0$
- Identificamos las constantes: $a = 5; b = -4; c = -1$
- Reemplazamos en la fórmula de Carnot:
  $$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(5)(-1)}}{2(5)}$$
- Determinamos sus raíces:
  $$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{10} = \frac{4 \pm 6}{10}$$
  $$x_1 = \frac{4 + 6}{10} \quad \vee \quad x_2 = \frac{4 - 6}{10}$$
  $$x_1 = 1 \ \vee \ x_2 = -\frac{1}{5}$$
- Su conjunto solución será: $CS = \left\{-\frac{1}{5}; 1\right\}$

Propiedades de las raíces

Dada una ecuación de segundo grado se tiene:

Suma de raíces

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

Producto de raíces

$x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$

PLANTEO DE ECUACIONES

Sobre números enteros consecutivos

Ejemplo:

Encuentra dos números enteros positivos consecutivos impares, tales que el cuadrado del segundo menos el primero sea 212.

Resolución:

- Sean los números: x y x + 2
- Según el enunciado:
  $(x + 2)^2 - x = 212$
  $x^2 + 3x - 208 = 0$
  x ⟶ +16
  x ⟶ −13
  $(x + 16)(x - 13) = 0 \begin{cases} x = -16 \notin \mathbb{Z}^+ \\ x = 13 \end{cases}$
- Los números serán:
  $x = 13$
  $x + 2 = 15$
- Usamos la otra representación: $2x - 1$ y $2x + 1$
- Del enunciado:
  $(2x + 1)^2 - (2x - 1) = 212$
  $2x^2 + x - 105 = 0$
  2x ⟶ +15
  x ⟶ −7
  $(2x + 15)(x - 7) = 0 \begin{cases} x = -\frac{15}{2} \notin \mathbb{Z}^+ \\ x = 7 \end{cases}$
- Los números serán:
  $2x - 1 = 13$
  $2x + 1 = 15$

Sobre datos numéricos

Ejemplo:

Un segundo número es 5 menos que el doble del primero. Si el segundo número es multiplicado por 3 más que el primero, el resultado es 21. Encuentra el menor de los números enteros.

Resolución:

- Sean los números: 1.er número = N $\wedge$ 2.° número = 2N − 5
- Del enunciado:
  El 2.° número es multiplicado por 3 más que el primero, el resultado es 21 $\Rightarrow 3((2N - 5) + N) = 21$
  $\Rightarrow 3N - 5 = 7 \Rightarrow N = 4$
- Por último, el menor de los números es: $2N - 5 = 2(4) - 5 = 3$



Problemas de aplicación

1. Resuelve: $\sqrt{3x^2 - 12} - x = 0$

   Resolución:
   $\sqrt{3x^2 - 12} = x$
   $3x^2 - 12 = x^2$
   $2x^2 = 12$
   $x = \pm\sqrt{6}$

2. Determina el valor de a si –5 es solución de: $x^2 + ax + 10 = 0$

   Resolución:
   Si –5 es solución; verifica la ecuación:
   $\Rightarrow (-5)^2 + (11 - 5) + 10 = 0$
   $25 - 5a + 10 = 0$
   $-5a = -35$
   $a = 7$

3. Si m y n son raíces de: $x^2 - 10x + 2$
   Calcula $m^2 + n^2$

   Resolución:
   Sabemos que: $(m + n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$ ... (I)
   Por definición
   $m + n = \frac{-b}{a}$ $(a = 1; b = -10)$
   $m + n = \frac{(-10)}{1} = 10$
   $m \cdot n = \frac{c}{a}$ $(c = 2 ; a = 1)$
   $m \cdot n = \frac{2}{1} = 2$
   En (I):
   $(10)^2 = m^2 + 2(2) + n^2$
   $96 = m^2 + n^2$

4. Jesús tiene la mitad de lo que tengo y Mery el triple de lo que Jesús tiene. Si tengo x, ¿cuánto tiene Mery?

   Resolución:
   Dato: tengo x
   Jesús tiene: $\frac{x}{2}$
   Mery tiene: $\frac{3x}{2}$

5. El séxtuplo de un número aumentado en 8 excede en 2 al número 70, determina el número.

   Resolución:
   Sea N el número:
   $6(N + 8) - 2 = 70$
   $6(N + 8) = 72$
   $N + 8 = 12$
   $N = 4$

6. Un número es a 7 como 6 es a 12 veces dicho número, disminuido en 3. Determina el número si es positivo.

   Resolución:
   Sea el número: x
   El número es a 7: $\frac{x}{7}$
   4 es a 12 veces el número, disminuido en 3: $\frac{4}{12x - 3}$
   $\Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{6}{12x - 3} \Rightarrow 12x^2 - 3x = 42$
   $12x^2 - 3x - 42 = 0$
   4x   7
   3x   –6
   $x = -\frac{7}{4} \vee x = 2$
   $\therefore x = 2$

EFECTUAR

1. Resuelve:
   $x^2 + 11x + 24 = 0$
2. Resuelve:
   $x^2 + 3x - 1 = 0$
   Indica la mayor raíz.
3. Resuelve:
   $x^2 + 3x - 5 = 0$
   Indica la menor raíz.
4. Resuelve:
   $x^2 + 2x - 5 = 0$
5. Resuelve:
   $x^2 + 4x - 3 = 0$
6. Resuelve:
   $2x^2 - 7x + 3 = 0$
7. Resuelve:
   $3x^2 - 2x - 6 = 0$
8. Halla la mayor raíz al resolver:
   $6x^2 - 11x + 3 = 0$
9. Halla la mayor raíz al resolver:
   $10x^2 - x - 2 = 0$
10. Halla la menor raíz de:
    $x^2 - 2x - 1 = 0$
11. Halla la menor raíz de:
    $x^2 - 6x + 6 = 0$
12. Resuelve: $9x - 18 - x^2 = 0$
    Indica la suma de sus raíces.
13. Resuelve: $x^2 = 16x - 63$
14. Resuelve: $x + 11 = 10x^2$
    Indica la menor raíz.
15. Resuelve: $48 - x^2 + 8x = 0$
    Indica la suma de sus raíces.

Problemas resueltos

1 Resuelve:
$2x^2 - 11x - 13 = 0$ e indica la menor raíz.

Resolución:
$2x^2 - 11x - 13 = 0$

$$\begin{matrix} 2x & & -13 \\ 1x & & +1 \end{matrix} \qquad \left.\begin{matrix} -13x \\ 2x \end{matrix}\right\}(+) \qquad -11x$$

$\Rightarrow (2x - 13)(x + 1) = 0$

Entonces:
$2x - 13 = 0 \;\lor\; x + 1 = 0$
$2x = 13 \qquad x_2 = -1$
$x_1 = \frac{13}{2}$

$\therefore$ La menor raíz es: -1

2 Resuelve:
$x^2 - 5x = 0$

Resolución:
$x^2 - 5x = 0$
Factorizamos: $x(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 0 \lor x - 5 = 0$
$x = 5 \;\therefore\; CS = \{0; 5\}$

3 Halla el discriminante de la ecuación:
$mx^2 + (2m - 1)x + m - 1 = 0$

Resolución:
De la ecuación:
$mx^2 + (2m - 1)x + m - 1 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (2m - 1)^2 - 4m(m - 1)$
$\Delta = 4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 + 4m$
$\therefore\; \Delta = 1$

4 La ecuación: $x^2 - Ax + B = 0$, tiene una raíz que es el triple de la otra, luego A y B están relacionadas por:

Resolución:
De la ecuación:
$x^2 - Ax + B = 0$
Dato: $x_1 = 3x_2$

Sabemos que:
(*) $x_1 + x_2 = -(-A)$
$\downarrow$
$3x_2 + x_2 = A \Rightarrow x_2 = \frac{A}{4}$ ...(I)

(*) $x_1x_2 = B$
$\downarrow$
$3x_2 . x_2 = B \Rightarrow x_2^2 = \frac{B}{3}$ ...(II)

De (I) y (II):
$\left(\frac{A}{4}\right)^2 = \frac{B}{3} \Rightarrow 3A^2 = 16B$

5 Indica la naturaleza de las raíces de:
$2x^2 + 5x + 1 = 0$

Resolución:
$\Delta = 5^2 - 4(2)(1) = 25 - 8 = 17 > 0$

Por lo tanto, tiene raíces reales diferentes.

6 Halla el CS de: $x^2 - \sqrt{2}x - 5 = 0$

Resolución:
Usamos la fórmula general:
$$x_{1;2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{\sqrt{2}^2 - 4(-5)}}{2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{22}}{2}$$
$$\therefore\; CS = \left\{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{22}}{2} ; \frac{\sqrt{2} - \sqrt{22}}{2}\right\}$$

7 Resuelve:
$4x^2 - 28x + 49 = 0$

Resolución:
$4x^2 - 28x + 49 = (2x - 7)^2 \Rightarrow 2x - 7 = 0$
$x = 7/2$

$\therefore CS = \left\{\frac{7}{2}\right\}$

8 Encuentra dos números enteros negativos consecutivos, cuyo producto sea igual a 132. Determina el número mayor.

Resolución:
Sean los números consecutivos negativos: $x; x + 1 (x < 0)$

Por condición, su producto es 132:
$x(x + 1) = 132$
$x^2 + x - 132 = 0$

$$\begin{matrix} x & & -11 \\ x & & +12 \end{matrix}$$

$(x - 11)(x + 12) = 0$
$x = 11 \;\lor\; x = -12$
$x = 11$; no cumple con la condición.

Los números negativos consecutivos serán:
$x = -12$
$x + 1 = -12 + 1 = -11$
$\therefore\; -11$ (número mayor)

DESIGUALDADES E INECUACIONES

X

DESIGUALDAD

Es aquella comparación que se establece entre dos números reales, mediante los símbolos de desigualdad ($<, >, \leq, \geq$).

La relación "mayor o igual que" ($\geq$) se define como: $a \geq b \Longleftrightarrow a > b \ \vee \ a = b$

La relación "menor o igual que" ($\leq$) se define como: $a \leq b \Longleftrightarrow a < b \ \vee \ a = b$

Ejemplos:

- $7 \geq 3 \Longleftrightarrow 7 > 3 \ \vee \ 7 = 3$
- $9 \leq 9 \Longleftrightarrow 9 < 9 \ \vee \ 9 = 9$

} Es suficiente que se verifique una de las relaciones de orden.

Nota

- Los símbolos de las desigualdades se leen como:

>: "mayor que" <: "menor que"	Estrictas
≥: "mayor o igual que" ≤: "menor o igual que"	No estrictas

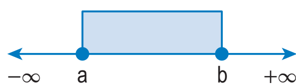
INTERVALOS

Es el conjunto de todos los números reales que están comprendidos entre dos extremos (pueden ser finitos o infinitos).
Se presentan de dos formas:

1 Intervalo acotado

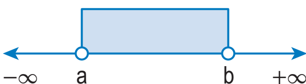
Cuando sus extremos reales son finitos, pueden ser:

I. Intervalo cerrado
Se consideran a los extremos finitos.



$x \in [a; b] \Longleftrightarrow a \leq x \leq b$; $a < b$

II. Intervalo abierto
No se consideran a los extremos finitos.



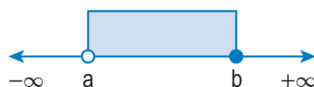
$x \in \langle a; b \rangle \Longleftrightarrow a < x < b$; $a < b$

III. Intervalo semiabierto por la derecha



$x \in [a; b\rangle \Longleftrightarrow a \leq x < b$; $a < b$

IV. Intervalo semiabierto por la izquierda

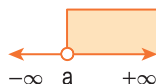


$x \in \langle a; b] \Longleftrightarrow a < x \leq b$; $a < b$

2 Intervalo no acotado

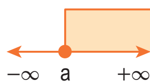
Es aquel en donde al menos un extremo son los infinitos ($-\infty$ o $+\infty$).

I.



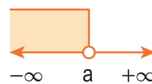
$\langle a; +\infty \rangle = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$

II.



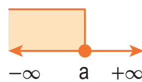
$[a; +\infty \rangle = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$

III.



$\langle -\infty; a \rangle = \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$

IV.



$\langle -\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$

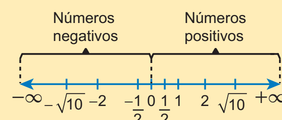
Atención

- **Ley de la tricotomía**
De los números reales **a** y **b** se cumplirá una y tan solo una de las siguientes relaciones.

$a > b \ \vee \ a = b \ \vee \ a < b$

Así: $\{6; 9\} \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \underset{F}{\underline{6 > 9}} \ \vee \ \underset{F}{\underline{6 = 9}} \ \vee \ \underset{V}{\underline{6 < 9}}$
Vemos que las dos primeras relaciones son falsas, se cumplirá la tercera relación.

- **Recta numérica real**
Es una forma geométrica que nos permite ordenar a los números reales.



Los ideales infinitos, no son números reales y son:
$-\infty; +\infty$



Recuerda

- Las propiedades fundamentales de las desigualdades:

1. $\forall a; b \in \mathbb{R} \wedge m \in \mathbb{R}^-$, se cumple:

$$a > b \Longleftrightarrow am < bm$$
$$a > b \Longleftrightarrow \frac{a}{m} < \frac{b}{m}$$

2. $\forall a; b \in \mathbb{R} \wedge m \in \mathbb{R}$, se cumple:

$$a > b \Longleftrightarrow a \pm m > b \pm m$$

3. Si a y b tienen el mismo signo, se cumple:

$$a < x < b \Longleftrightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$$

4. $\forall a; b \in \mathbb{R} \wedge m \in \mathbb{R}^+$, se cumple:

$$a > b \Longleftrightarrow am > bm$$
$$a > b \Longleftrightarrow \frac{a}{m} > \frac{b}{m}$$

5. Regla de los signos de la multiplicación:

$ab > 0 + ((a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0))$

$ab < 0 + ((a < 0 \wedge b > 0) \vee (a > 0 \wedge b < 0))$

6. $x^{2n} \geq 0$; $\forall x \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{Z}^+$

7. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, se cumple:

$$a > b \Longleftrightarrow a^{2n} > b^{2n}$$

* $c < b < a \Longleftrightarrow c^{2n} < b^{2n} < a^{2n}$

8. $\forall a; b \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{Z}^+$, se cumple:

$$a > b \Longleftrightarrow a^{2n+1} > b^{2n+1}$$
$$a > b \Longleftrightarrow \sqrt[2n+1]{a} > \sqrt[2n+1]{b}$$

9. $\forall a; b; c, d \in \mathbb{R}$, se verifica:

$$\begin{array}{c} a > b \\ c > d \\ \hline a + c > b + d \end{array}$$

10. Regla de los signos de la división

$\frac{a}{b} < 0 + ((a < 0 \wedge b > 0) \vee (a > 0 \wedge b < 0))$

$\frac{a}{b} > 0 + ((a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0))$



INECUACIONES DE PRIMER GRADO

Son aquellas que luego de ser reducidas adquieren las siguientes formas generales:

$$ax + b > 0 \vee ax + b < 0$$
$$ax + b \geq 0 \vee ax + b \leq 0$$

Donde: $a \neq 0 \wedge \{a; b\} \subset \mathbb{R}$

Ejemplo:

Determina el complemento del conjunto solución: $\frac{4x+1}{5} > \frac{3x-2}{3}$

Resolución:

- Multiplicamos a ambos miembros de la inecuación por el MCM (5; 3) = 15 de los denominadores:

$$15\left(\frac{4x+1}{5}\right) > 15\left(\frac{3x-2}{3}\right)$$
$$12x + 3 > 15x - 10$$

- Sumamos(– 15x) a ambos miembros de la inecuación:

$$12x - 15x + 3 > 15x - 15x - 10$$
$$-3x + 3 > -10$$

- Sumamos(–3) a ambos miembros de la inecuación:

$$-3x + 3 - 3 > -10 - 3$$
$$-3x > -13$$

- Multiplicamos por $\left(-\frac{1}{3}\right)$ a ambos miembros de la inecuación:

$$\left(-\frac{1}{3}\right)(-3x) < \left(-\frac{1}{3}\right)(-13)$$
$$\Rightarrow x < \frac{13}{3}$$

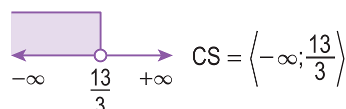
- El conjunto solución está dado por:

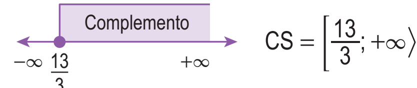
$$CS = x \in \left\langle -\infty; \frac{13}{3} \right\rangle$$

- Nos piden el complemento del conjunto solución:

$$\therefore \; CS = x \in \left[\frac{13}{3}; +\infty\right\rangle$$

- Gráficamente:





SISTEMAS DE INECUACIONES DE PRIMER GRADO

Es aquella agrupación de inecuaciones cuyas soluciones verifica simultáneamente a cada inecuación.

Sistema expresado en función de una sola incógnita

1.° caso: $\forall a; b; c$ y $d \in \mathbb{R}$ $\quad a < cx + d < b$

Ejemplo:

Determina los valores de x que satisfacen a la limitación siguiente: $-6 < x + 4 < -1$

Resolución:

Sumamos –4 a cada uno de los miembros de la inecuación:

$$-6 - 4 < x + 4 - 4 < 1 - 4$$
$$-10 < x < -5$$

Consideramos solo valores enteros, consideramos los que satisfacen a la inecuación: $x = \{-9; -8; -7; -6\}$

2.° caso: $\forall a; b; c; d; e$ y $f \in \mathbb{R}$ $\quad ax + b < cx + d < ex + f$

Ejemplo:

Determina el conjunto solución de: $\frac{x}{4} + 1 < \frac{x-5}{2} < \frac{x}{3} + 2$

Resolución:

Resolvemos por separado; luego intersecamos las soluciones de (I) y (II):

$$\underbrace{\frac{x}{4}+1<\overbrace{\frac{x-5}{2}}^{}}_{(I)}\overbrace{<\frac{x}{3}+2}^{(II)}$$

Multiplicamos a cada miembro de la inecuación (I) por el MCM de sus denominadores (MCM(4;2) = 4).

$$\frac{x}{4}+1<\frac{x-5}{2}$$

$$4\left(\frac{x}{4}+1\right)<4\left(\frac{x-5}{2}\right)$$

$$x+4<2x-10$$

Sumamos (−2x) y (− 4) a la vez a cada miembro de la desigualdad: $x-2x+4-4<2x-2x-10-4$

$$-x<-14$$

Multiplicamos por −1 a ambos miembros: $(-1)(-x)<(-1)(-14)$

$$x>14 \qquad ...(I)$$

Multiplicamos a cada miembro de la inecuación (II) por el MCM de sus denominadores (MCM (2; 3) = 6):

$$\frac{x-5}{2}<\frac{x}{3}+2$$

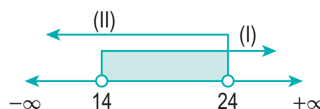
$$6\left(\frac{x-5}{2}\right)<6\left(\frac{x}{3}+2\right)$$

$$3x-15<2x+12$$

Sumamos (−2x) y (15) a la vez a cada miembro de la desigualdad: $3x-2x-15+15<2x-2x+12+12$

$$x<24 \qquad ...(II)$$

Intersecamos los conjuntos (I) y (II):



El conjunto solución estará dado por: $x\in\langle 14;24\rangle$

Sistema expresado en función de dos o más incógnitas

En este caso se tiene que realizar transformaciones adecuadas para obtener el sistema expresado en función de una de sus incógnitas luego determina su conjunto solución, haciendo los reemplazos adecuados deduciremos el conjunto solución de los otros.

Ejemplo: exámen de admisión UNI 2006–II (matemática)

Halla el valor de E = 4x + 3y, donde x e y son los valores enteros que satisfacen el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases}5x-3y>2\\2x+y<11\\y>3\end{cases}$$

Resolución:

En el sistema de inecuaciones; téngase en cuenta que: $\{x;y\}\in\mathbb{Z}$

$$5x-3y>2 \qquad ...(1)$$
$$2x+y<11 \qquad ...(2)$$
$$y>3 \qquad ...(3)$$

Multiplicamos por (−2) a la inecuación (1) miembro a miembro: $(-2)(5x-3y)>(-2)(2)$

$$-10x+6y<-4 \qquad ...(4)$$

Multiplicamos por 5 a la inecuación (2) miembro a miembro: $5(2x+y)<5(11)$

$$10x+5y<55 \qquad ...(5)$$

Sumamos miembro a miembro: las desigualdades (4) y (5): $11y<51$

$$y<4,6 \qquad ...(6)$$



Atención

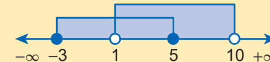
A las operaciones con intervalos.

1. Unión de intervalos

$A\cup B=\{x\in\mathbb{R}/x\in A\vee x\in B\}$

Sean:
$A=[-3;5]\wedge B=\langle 1;10\rangle$

Graficamos:



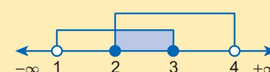
⇒ $A\cup B=[-3;10\rangle$

2. Intersección de intervalos

$A+B=\{x\in\mathbb{R}/x\in A\wedge x\in B\}$

Sean:
$A=\langle 1;3]\ \wedge\ B=[2;4\rangle$

Graficamos:



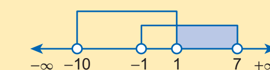
⇒ $A+B=[2;3]$

3. Diferencia de intervalos

$A-B=\{x\in\mathbb{R}/x\in A\wedge x\notin B\}$

Sean:
$A=\langle -1;7\rangle\ \wedge\ B=\langle -10;1\rangle$

Graficamos:



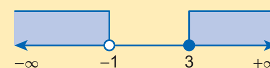
⇒ $A-B=\langle 1;7\rangle$

4. Complemento de un intervalo

$A'=\{x/x\in\mathbb{R}\ \wedge\ x\notin A\}$

Sean: $A=[-1;3\rangle$; $A'=?$

Graficamos:



$A'=\langle -\infty;-1\rangle\cup[3;+\infty\rangle$

Nota

Considerar las siguientes propiedades fundamentales de las desigualdades:

- Si multiplicamos por un número negativo; la desigualdad cambia de sentido.
- Solo se pueden sumar desigualdades que tengan un mismo sentido.



Observaciones

- Si la inecuación contiene los símbolos > o <, la curva de la inecuación realizarla con líneas punteadas, esto porque la curva no forma parte de la solución.
- Si la inecuación contiene los símbolos ≥ o ≤, la curva de la inecuación realizarla con líneas continuas, esto indica que la curva si forma parte de la solución.

Recuerda

- El conjunto solución de una inecuación es un semiplano.
- El conjunto solución de un sistema de inecuaciones vendrá hacer la intersección de todos los semiplanos.



Nota

En la gráfica de la inecuación (1), podríamos haber elegido, por ejemplo, el punto (–3; 0) que pertenece al semiplano del lado izquierdo, evaluando resulta:

$3x - 2y > -6$
$\Rightarrow 3(-3) - 2(0) > -6$
$\Rightarrow -9 > -6$ (F)

Esto indica que el semiplano que se debe sombrear es el del lado derecho.

De (3) y (6) obtenemos el valor entero de y: $3 < y < 4; 6$
$\Rightarrow y = 4$ ...(7)

Reemplazando (7) en (1) y (2): $2{,}8 < x < 3{,}5$
$\Rightarrow x = 3$

Nos piden el valor de: $E = 4x + 3y$
$E = 4(3) + 3(4) = 24$

GRÁFICA DE UNA INECUACIÓN LINEAL

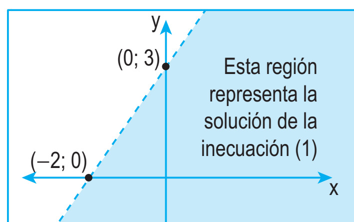
Pasos a seguir:

1. Considera a la desigualdad como una igualdad.
2. Si la inecuación es lineal, esta es una recta; su gráfica se realiza son dos puntos.
3. Evalúa la inecuación cuando consideramos el punto (0; 0) = (x; y) u otros puntos adecuadamente. Si es verdadera la relación, sombrear el semiplano que contiene al punto, lo cual verifica la inecuación; si es falsa la solución será el semiplano no considerado.
4. Por último el conjunto solución del sistema estará dado por la intersección de los semiplanos.

Ejemplo:
Resuelve gráficamente el siguiente sistema: $3x - 2y > -6$ ...(1)
$2x + 3y \geq 6$ ...(2)

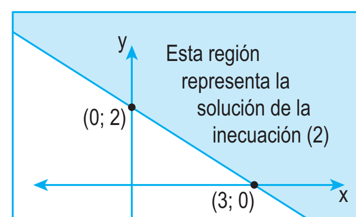
Resolución:

- Graficamos (1): $3x - 2y > -6$
  I. $3x - 2y = -6$
  II. Los dos puntos donde la recta corta a los ejes son:
  Para $x = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow$ 1.° punto: (0; 3)
  Para $y = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow$ 2.° punto: (–2; 0)
  La recta la trazamos con líneas punteadas (>):



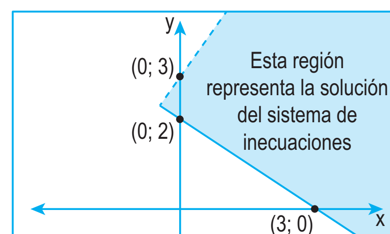
  III. Evaluamos para: (x; y) = [0; 0] que se encuentra en el semiplano inferior.
  $3x - 2y > -6 \Rightarrow 3(0) - 2(0) > -6 \Rightarrow 0 > -6$ (V)
  Por consiguiente sombreamos el semiplano inferior.

- Graficamos (2):
  $2x + 3y \geq 6$
  I. $2x + 3y = 6$
  II. Puntos de corte con los ejes:
  Para $x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow$ 1.° punto: (0; 2)
  Para $y = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow$ 2.° punto: (3; 0)
  La recta la trazamos con una línea continua (≥):



  III. Evaluamos para: (x; y) = (0; 0) que se encuentra en el semiplano inferior.
  $2x + 3y \geq 6 \Rightarrow 2(0) + 3(0) \geq 6 \Rightarrow 0 \geq 6$ (F)
  Por consiguiente sombreamos el semiplano superior.

  IV. Por último intersecamos los dos semiplanos:



GRÁFICA DE UNA INECUACIÓN CUADRÁTICA

$(ax^2 + bx + c;\ a; b; c \in \mathbb{R})$

Se realizan los mismos pasos que el caso anterior.

Ejemplo 1:
Determina el conjunto solución de la inecuación: $y > x^2 - 4x - 21$

Resolución:
I. $y = x^2 - 4x - 21$ ...(i)

II. En este caso la inecuación es cuadrática, luego:

El coeficiente del término cuadrático es positivo, en este caso la parábola abre hacia arriba.

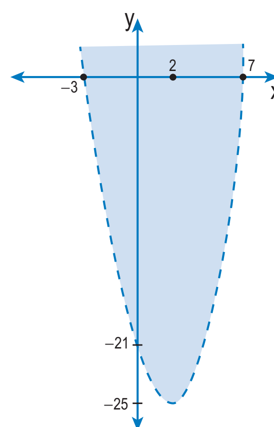
La abscisa del vértice es 2 (lo determinamos a partir de la fórmula $-b/2a$).

Sustituyamos este valor en (i) determinamos que la ordenada del vértice es: -25

$$(y = (2)^2 - 4(2) - 21 = 4 - 8 - 21 = -25)$$

La curva de la parábola corta al eje x en -3 y 7, al eje y en -21.

Estos datos son suficientes para graficar la parábola.

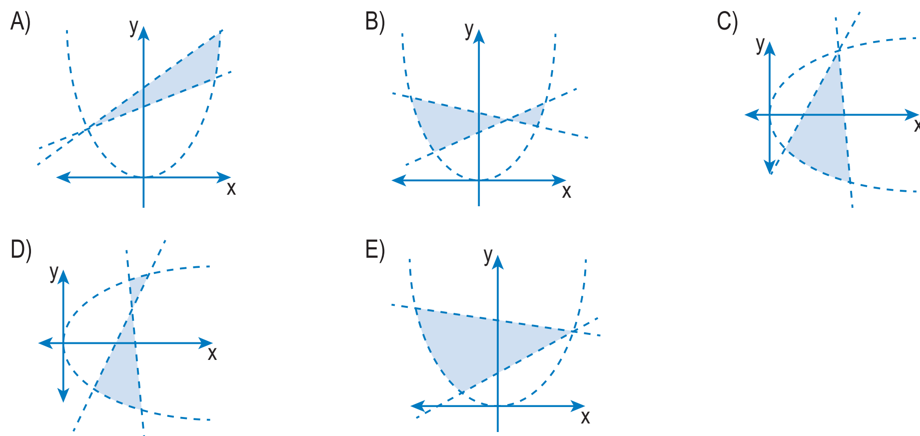


III. Evaluamos para (x; y) = (0; 0) obtenemos:

$0 > -21$ (V) este punto se encuentra en la zona interna de la parábola por consiguiente la solución de la inecuación está conformada por aquellos puntos internos de la parábola.

Ejemplo 2: **examen de admisión UNI 2002–II (matemática)**

Dadas las siguientes inecuaciones: $x^2 - y < 0$; $x + 4 < 3y$, $y < x + 2$ entonces los pares (x; y) que satisfacen estas inecuaciones están representadas por la región sombreada:



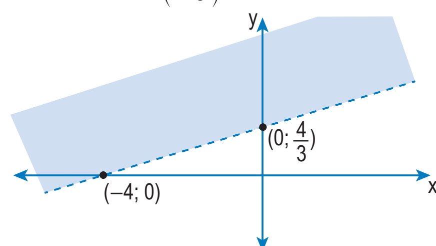
Resolución:

Ahora grafica las inecuaciones lineales: $x + 4 < 3y$; $y < x + 2$

Basta con que determinemos las coordenadas de dos de los puntos para cada uno de ellos.

$x + 4 < 3y$ (líneas punteadas)

$x - 3y + 4 = 0$: $\left(0; \frac{4}{3}\right)$ y $(-4; 0)$



Evaluamos:

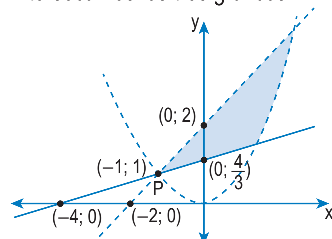
$(x; y) = (0; 0) \Rightarrow x + 4 < 3y \Rightarrow 4 < 0$ ...(F)

$y < x + 2$ (líneas punteadas)

$x - y + 2 = 0$: (0; 2) y (–2; 0)

Evaluamos: $(x; y) = (0; 0) \Rightarrow y < x + 2 \Rightarrow 0 < 2$ ...(V)

Intersecamos los tres gráficos:



$$\begin{cases} x^2 - y < 0 \\ x + 4 < 3y \\ y < x + 2 \end{cases}$$

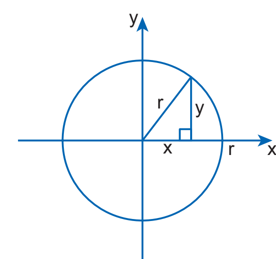
El punto de intersección P = (–1; 1) cumple con la ecuación $y = x^2 \Rightarrow 1 = 1$ (V) de esto concluimos que la parábola pasa por el punto de intersección P. De la gráfica la alternativa **A**, es la correcta.

Nota

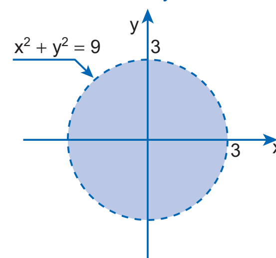
- La circunferencia tiene por ecuación:

  $x^2 + y^2 = r^2$

  r: radio de la circunferencia



Si se presenta como una inecuación: $x^2 + y^2 < 9$

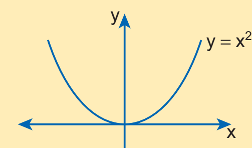




Observaciones

La curva de la parábola del ejemplo (1) la realizamos con líneas punteadas ya que la desigualdad contiene el símbolo >.

La ecuación más simple de una parábola es:

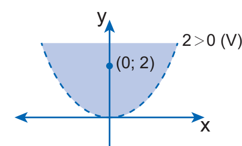


Nota

- Una de las inecuaciones del ejemplo 2 tiene la forma conocida de la parábola (simple):

  $y > x^2$

  que tiene por gráfica:



INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Son aquellas que adoptan las siguientes formas:

$$\begin{matrix} ax^2+bx+c>0 \ \vee \ ax^2+bx+c<0 \\ ax^2+bx+c\geq 0 \ \vee \ ax^2+bx+c\leq 0 \end{matrix} \ ; a\neq 0$$

Método de los puntos críticos ($\Delta > 0$)

Tómese en cuenta los siguientes pasos para dar solución a este tipo de inecuaciones.

I. Se verifica que el coeficiente principal (a) sea positivo, si es negativo cambiar de signo a todos los términos de la desigualdad, no olvidar que en el segundo miembro figure el cero.

II. Factoriza el trinomio y asi determina sus raíces denominadas ahora: **puntos críticos**.

III. Se ubican en forma ordenada los **puntos críticos** en la recta numérica real para analizar los signos del trinomio.

IV. Marca de derecha a izquierda y en forma alternada los signos: + – + – ...

V. Si el sentido de la desigualdad final es:

$>$ o $\geq$: la solución será todas las zonas positivas y si $<$ o $\leq$: la solución será todas las zonas negativas.

Ejemplo: **examen de Admisión UNI 2007–II (matemática)**

Halla la intersección de los conjuntos: $P=\{x\in\mathbb{R} / x^2-2x+a\geq 0\}$ y $Q=\{x\in\mathbb{R} / x^2-ax-2a^2\leq 0\}$

Donde: $\frac{3}{4}\leq a<1$

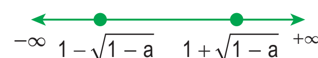
Resolución:

- Analicemos el primer conjunto P: $x^2-2x+a\geq 0$

Su coeficiente principal es positivo: $x^2=1x^2$ $(1>0)$

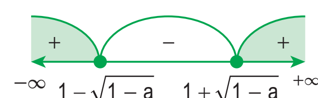
Para calcular los puntos críticos empleamos la fórmula general, obteniéndose: $x_1=1-\sqrt{1-a}$, $x_2=1+\sqrt{1-a}$

Ubica los puntos críticos en la recta real:



(Observa que: $1+\sqrt{1-a}>1-\sqrt{1-a}$ por ello el mayor está a la derecha y el menor a la izquierda).

Marcamos con los signos respectivos:



La desigualdad final tiene sentido $\geq$; por ello consideramos las zonas positivas que son el conjunto solución del conjunto P: $P: x\in\langle -\infty; 1-\sqrt{1-a}]\cup[1+\sqrt{1-a}; +\infty\rangle$

- Analizamos igual que el caso anterior, el conjunto Q: $x^2-ax-2a^2\leq 0$

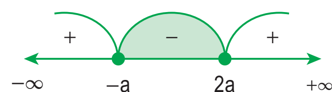
Su coeficiente principal es también positivo: $x^2=1x^2$ $(1>0)$

Sus puntos críticos se obtienen si empleamos el método del aspa simple: $x_1=-a \ \wedge \ x_2=2a$

Ubicamos los puntos en la recta numérica:



Marcamos los signos respectivos:



La desigualdad final tiene sentido $\leq$; consideramos solo la zona negativa: $Q: x\in[-a; 2a]$

- Lo que queda es hacer la intersección de los conjuntos, pero hay un detalle el cuál es la relación de orden de los puntos críticos, es decir:

¿$1-\sqrt{1-a}>-a$? o ¿$1-\sqrt{1-a}<-a$? o también: ¿$1+\sqrt{1-a}>2a$? o ¿$1+\sqrt{1-a}<2a$?

Nota

Evaluamos para $(x; y)=(0; 2)$ notamos que está en la zona interna de la parábola.

De lo anterior y por la forma de la gráfica se descartan las alternativas C y D; solo queda elegir entre A; B o E.

Atención

- El punto de intersección P se determina si solucionamos el sistema conformado por:
$\left.\begin{matrix} x-3y=-4 \\ x-y=-2 \end{matrix}\right\} x=-1; y=1$
- El punto $(x; y)=(-1; 1)$ cumple también con la ecuación: $y=x^2$



Recuerda

Para determinar las raíces de un trinomio, se puede emplear según el caso:

A) Aspa simple, o la
B) Fórmula general (cuando el trinomio no es factorizable)

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Nota

- Usamos la fórmula general para el trinomio del conjunto P:

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)a}}{2}$$

$x_1=1-\sqrt{1-a}$ $\wedge$

$x_2=1+\sqrt{1-a}$

$x_2>x_1$

Nota

Usamos el método del aspa simple para el trinomio del conjunto Q:

$x^2-ax-2a^2\leq 0$
x   –2a
x   a
$(x-2a)(x+a)\leq 0$
PC: $x_2=2a \wedge x_1=-a$



El dato: $\frac{3}{4} \leq a < 1$ nos ayudará a despejar estas dudas de la siguiente manera:

El intervalo a donde pertenece –a es: $-1 < -a \leq -\frac{3}{4}$ ...(1)

Multiplicamos por –2 miembro a miembro: $\frac{3}{4} \leq 2a < 2$ ...(2)

Sumamos 1 a cada miembro de la desigualdad (1): $-1 + 1 < 1 - a \leq 1 - \frac{3}{4}$

$0 < 1 - a \leq \frac{1}{4}$

Sacando raíz cuadrada: $0 < \sqrt{1-a} \leq \frac{1}{2}$

Multiplicamos por –1 a cada miembro: $(-1)\, 0 < (-1)\sqrt{1-a} \leq (-1)\, \frac{1}{2}$

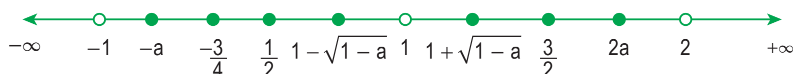
$-\frac{1}{2} \leq -\sqrt{1-a} < 0$

Sumamos 1 a cada miembro de la desigualdad: $1 - \frac{1}{2} \leq 1 - \sqrt{1-a} < 1 + 0$

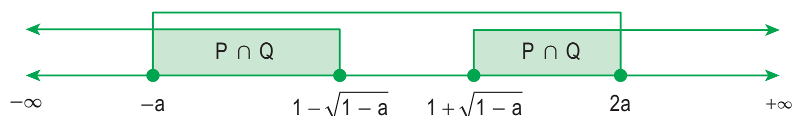
$\frac{1}{2} \leq 1 - \sqrt{1-a} < 1$ ...(3)

Comprueba que también el intervalo es: $1 < 1 + \sqrt{1-a} \leq \frac{3}{2}$ ...(4)

- Con estas conclusiones ubica dichos intervalos en forma ordenada sobre la recta numérica real:



- Intersecamos los conjuntos P y Q:



$P + Q = [-a;\, 1-\sqrt{1-a}\,] \cup [1+\sqrt{1-a}\,;\, 2a]$

Atención

El sentido de la desigualdad cambia cuando se le multiplica por una cantidad negativa.



Atención

Considera la siguiente propiedad fundamental:

Si: a; b > 0 ∧ $a < x \leq b$

Se cumple:

$\sqrt{a} < x \leq \sqrt{b}$



Atención

- Téngase en cuenta la característica principal del siguiente teorema:
  Trinomio positivo
  $\forall x \in \mathbb{R} \;\wedge\; ax^2 + bx + c \geq 0$
  $a > 0 \;\wedge\; b^2 - 4ac \leq 0$



EFECTUAR

Resuelve las siguiente ecuaciones:

a) $\frac{a^2 + x^2}{2bx} - \frac{x}{b} > \frac{a - x}{2xb^2}$

b) $\frac{5}{x+2} - \frac{10}{x^2 - 4} > \frac{1}{2 - x}$

c) $\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x+4} < 1$

d) $\frac{x-1}{x-2} > \frac{x-3}{2x-3}$

e) $\frac{5(x-2)}{x+2} - \frac{2(x-3)}{x+3} \geq 3$

f) $\frac{1}{2x-3} + \frac{3}{2x^2 - 3x} < \frac{5}{x} + \frac{7x - 15}{3x - 2x^2}$

g) $x + \sqrt{x-2} > 4$

h) $\sqrt{x-1} > 3 + \sqrt{3x-2}$

i) $\sqrt{2x-6} + \sqrt{x+14} \geq 5$

j) $\frac{p}{p-x} + \frac{q}{q-x} \geq 2$

k) $\frac{2}{1-x} - \frac{42}{1+4x} + \frac{20}{1+2x} \leq 0$

Problemas resueltos

1 Si $3 < \frac{x+2}{x+1} \leq 4$; calcula la variación de (x^2+2x).

Resolución:

Si: $3 < \frac{x+2}{x+1} \leq 4$

$3 < \frac{x+1+1}{x+1} \leq 4$

$3 < 1 + \frac{1}{x+1} \leq 4$

Restamos uno:

$2 < \frac{1}{x+1} \leq 3$

Invertimos:

$\frac{1}{2} > x+1 \geq \frac{1}{3}$

Elevamos al cuadrado:

$\frac{1}{4} > x^2+2x+1 \geq \frac{1}{9}$

Restamos uno:

$-\frac{3}{4} > x^2+2x \geq -\frac{8}{9}$

$\therefore (x^2+2x) \in \left[-\frac{8}{9}; -\frac{3}{4}\right\rangle$

2 Sea:

$A = \{x \in \mathbb{R} / 4x + 10 \leq 0\}$ y

$B = \{x \in \mathbb{R} / 13 \geq -2x + 19\}$

Calcula el complemento de $A \cup B$.

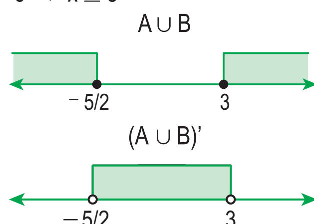
Resolución:

En el conjunto A:

$4x \leq -10 \Rightarrow x \leq \frac{-5}{2}$

En el conjunto B:

$2x \geq 19 - 13 = 6 \Rightarrow x \geq 3$



$\therefore CS = \left\langle -\frac{5}{2}; 3 \right\rangle$

3 Resuelve para x:

$\frac{b^2}{a^2} + (1+4x)\frac{(a^3-b^3)}{a^2b} \leq \frac{a}{b}$ / $a < b < 0$

Resolución:

$\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^3-b^3}{a^2b}(1+4x) \leq \frac{a}{b}$

$\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^3-b^3}{a^2b} + 4x\left(\frac{a^3-b^3}{a^2b}\right) \leq \frac{a}{b}$

$\frac{b^2}{a^2} + \frac{a}{b} - \frac{b^2}{a^2} + 4x\left(\frac{a^3-b^3}{a^2b}\right) \leq \frac{a}{b}$

$\left(\frac{a^3-b^3}{a^2b}\right)x \leq 0$ ...(1)

Del dato:

$a < b \Rightarrow a^3 < b^3 \Rightarrow a^3 - b^3 < 0$ ...(2)

Además, $b < 0$, entonces en (2): $\frac{a^3-b^3}{b} > 0$

Por lo tanto en (1):

$\underbrace{\left(\frac{a^3-b^3}{b}\right)}_{>0}x \leq 0 \Rightarrow x < 0$

$\therefore CS = \langle -\infty; 0\rangle$

4 Sean los conjuntos:

$A = \left\{x - 1 / 2x - 2 \leq \frac{x+8}{2}\right\}$

$B = \left\{2x + 1 / x + 1 \geq \frac{2x+4}{3}\right\}$

Si $E = (A + B)$, calcula la suma de los cuadrados de los valores enteros que admite E.

Resolución:

$A = \left\{x - 1 / 2x - 2 \leq \frac{x+8}{2}\right\}$

$4x - 4 \leq x + 8$

$3x \leq 12$

$x \leq 4$

$x - 1 \leq 3$

$\Rightarrow A = \langle -\infty; 3]$

$B = \left\{2x + 1 / x + 1 \geq \frac{2x+4}{3}\right\}$

$3x + 3 \geq 2x + 4$

$x \geq 1$

$2x + 1 \geq 3$

$\Rightarrow B = [3; +\infty\rangle$

$E = A + B = \{3\}$

$\Rightarrow$ Piden: $(3)^2 = 9$

5 Resuelve: $4x^2 - 12x + 9 \geq 0$

Resolución:

$4x^2 - 12x + 9 \geq 0;$

$(2x)^2 - 2(2x)(3) + 3^2 \geq 0$

$(2x-3)^2 \geq 0$; se verifica $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$\therefore CS = \mathbb{R} = \langle -\infty ; +\infty\rangle$

6 Resuelve:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x - 2} > 0$$

Resolución:

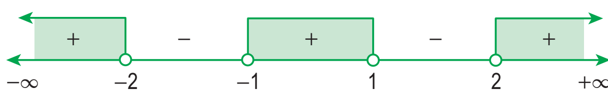
Por condición:

$$\frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)} > 0$$

$\Rightarrow (x-1)(x-2)(x+1)(x+2) > 0$

Por puntos críticos:

$x = 1; x = 2; x = -1; x = -2$



$\therefore\ x \in \langle -\infty; -2\rangle \cup \langle -1; 1\rangle \cup \langle 2; +\infty\rangle$

7 Halla el menor valor de N, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$-13 - x^2 - 4x \leq N$$

Resolución:

Multiplicando por (–1):

$x^2 + 4x + 13 \geq -N$

$\underbrace{(x)^2 + 2(2)(x) + 4} + 9 \geq -N$

$\underbrace{(x+2)^2}_{0} + 9 \geq -N$

$(x + 2)^2 = 0$; para que N cumple la condición de valor mínimo.

Entonces: $9 \leq -N \Rightarrow N \geq -9$

$\therefore$ El menor valor de N es: –9

8 La representación gráfica de los puntos (x; y) que satisfacen la inecuación:

$$\frac{x - y}{x^2 + y^2 - 16} > 0 \text{ es:}$$

Resolución:

La gráfica que representa a la inecuación lo determinaremos haciendo la unión de los conjuntos A y B ($A \cup B$).

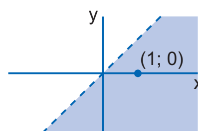
$$\frac{x - y}{x^2 + y^2 - 16} = \frac{M}{N} > 0$$

Según la propiedad de los signos de la división:

$$\frac{M}{N} > 0 \Longleftrightarrow \Big(\underbrace{(M > 0 \wedge N > 0)}_{A} \vee \underbrace{(M < 0 \wedge N < 0)}_{B}\Big)$$

- Determinamos la gráfica del conjunto A:
  $M > 0: x - y > 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$
  $N > 0: x^2 + y^2 - 16 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16$

Gráfica de x = y



Evaluamos para:

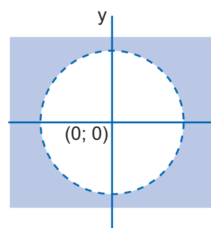
$x - y > 0$

$1 - 0 > 0$

$1 > 0$ ...(V)

$\Rightarrow$ Sombreamos el semiplano lado derecho.

Gráfica de $x^2 + y^2 = 4^2$ (r = 4)



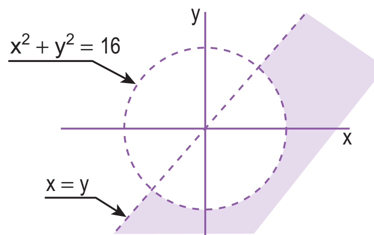
Evaluamos para:

(x; y) = (0; 0) (punto interno de la circunferencia)

$x^2 + y^2 - 16 > 0\ -16 > 0$ ...(F)

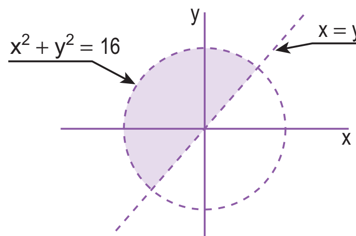
$\Rightarrow$ Sombreamos fuera de la circunferencia.

Intersecamos: $x^2 + y^2 = 16 \ \wedge\ x = y$

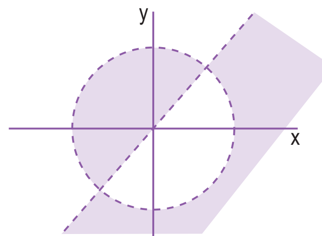


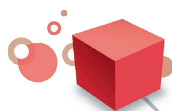
- Determinamos la gráfica del conjunto B:
  $M < 0: x - y < 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$
  $N < 0: x^2 + y^2 - 16 < 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16$

Siguiendo la misma analogía que el caso anterior:



Uniendo los gráficos de los conjuntos A y B, resulta:





UNIDAD 4

VALOR ABSOLUTO

Observación

El valor absoluto de un número real cualquiera será siempre positivo.

Por consiguiente:

$|x| = -9$ no tiene solución



DEFINICIÓN

El valor absoluto de un número real **x** se define como aquel número real no negativo que se denota por $|x|$ donde:

$$|x| = \begin{cases} x; & \text{si } x \geq 0 \\ -x; & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

1. $|x-2| + 2 = \begin{cases} x-2+2; & x-2 \geq 0 \\ -(x-2)+2; & x-2 < 0 \end{cases} \Rightarrow |x-2| + 2 = \begin{cases} x; & x \geq 2 \\ 4-x; & x < 2 \end{cases}$

2. $|x-7| + 3 - (x^2+1) = \begin{cases} x-7+3-x^2-1; & x-7 \geq 0 \\ -(x-7)+3-x^2-1; & x-7 < 0 \end{cases} \Rightarrow |x-7| + 3 - (x^2+1) = \begin{cases} -x^2+x-5; & x \geq 7 \\ -x^2-x+9; & x < 7 \end{cases}$

ECUACIONES QUE INCLUYEN VALOR ABSOLUTO

Sean **x** y **a** expresiones algebraicas, que cumplen los siguientes teoremas:

$$|x| = a \Longleftrightarrow (a \geq 0) \wedge (x = a \vee x = -a)$$

Ejemplos:

1. Resuelve: $|x - 10| = 9$

   Resolución:

   - Aplicamos la propiedad:

     $x - 10 = 9 \Rightarrow x = 19 \vee$

     $x - 10 = -9 \Rightarrow x = 1$

   - El conjunto solución es: $\{1; 19\}$

2. Resuelve: $|x + 6| = 2x - 10$

   Resolución:

   - Aplicamos la condición:

     $2x - 10 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 10 \Rightarrow x \geq 5$

   - Aplicamos la propiedad:

     $x + 6 = 2x - 10 \vee x + 6 = -(2x - 10)$

     $6 + 10 = 2x - x \vee x + 6 = -2x + 10$

     $x = 16 \vee x = \frac{4}{3}$

   - Descartamos $x = \frac{4}{3}$ por no satisfacer la condición: $x \geq 5$

   - El conjunto solución es: $\{16\}$

$$|x| = |b| \Longleftrightarrow (x = b \vee x = -b)$$

Ejemplos:

1. Resuelve: $|10x + 2| = |4x - 20|$

   Resolución:

   - Factorizamos en forma conveniente:

     $2|5x + 1| = 2|2x - 10|$

     $|5x + 1| = |2x - 10|$

   - Aplicamos la propiedad:

     $5x + 1 = 2x - 10 \vee 5x + 1 = -(2x - 10)$

     $x = -\frac{11}{3} \vee x = \frac{9}{7}$

     $CS = \left\{-\frac{11}{3}; \frac{9}{7}\right\}$

2. Resuelve: $|2x - 1| = |3x - 4|$

   Otra forma de solución:

   - Elevamos al cuadrado ambos miembros:

     $|2x - 1|^2 = |3x - 4|^2$

     $(2x - 1 + 3x - 4)(2x - 1 - 3x + 4) = 0$

     $(5x - 5)(3 - x) = 0$

     $(x - 1)(x - 3) = 0$

     $x - 1 = 0 \vee x - 3 = 0$

     $x = 1 \vee x = 3$

     $CS = \{1; 3\}$

Recuerda

Las siguientes propiedades de valor absoluto:

1. $|x| \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}$
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $|xy| = |x||y|; \forall x; y \in \mathbb{R}$
4. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}; y \neq 0$
5. $|x^2| = x^2; \forall x \in \mathbb{R}$
6. $\sqrt{x^2} = |x|; \forall x \in \mathbb{R}$
7. $|x| = |-x|, \forall x \in \mathbb{R}$
8. $|x + y| \leq |x| + |y|; \forall x; y \in \mathbb{R}$ (Desigualdad triangular)

Observación

Considera también:

a) $|x + y| = |x| + |y|$; si $x.y \geq 0$
b) $|x + y| < |x| + |y|$; si $x.y < 0$



INECUACIONES QUE INCLUYEN VALOR ABSOLUTO

Sean **x** y **b** expresiones algebraicas, entonces ten presente los teoremas:

$$|x| < b \Longleftrightarrow (b > 0) \wedge (-b < x < b) \quad ...(1)$$
$$|x| \leq b \Longleftrightarrow (b \geq 0) \wedge (-b \leq x \leq b) \quad ...(2)$$



Ejemplos:

1. Resuelve la inecuación: $|x - 6| < 9$

   Observamos que toma la forma del teorema (1), la expresión algebraica está expresada por $x - 6$:

   $$|x - 6| < 9$$

   Aplicamos el teorema (1): $-9 < x - 6 < 9$

   Sumamos 6 a cada parte: $-9 + 6 < x - 6 + 6 < 9 + 6$

   $$-3 < x < 15$$

   El conjunto solución es: $CS = \langle -3; 15 \rangle$, observa la figura I.

2. Resuelve la inecuación: $|5x - 2| \leq 3x + 4$

   Resolución:

   Toma la forma del teorema (2), las expresiones algebraicas para este caso son: $x \rightarrow 5x - 2$ y $b \rightarrow 3x + 4$:

   $|5x - 2| \leq 3x + 4$

   Aplicamos el teorema (2): $(3x + 4 \geq 0) \wedge (-(3x + 4) \leq 5x - 2 \leq 3x + 4)$

   El segundo paréntesis se puede escribir de otra forma: $\left(x \geq -\frac{4}{3}\right) \wedge (5x - 2 \geq -3x - 4 \wedge 5x - 2 \leq 3x + 4)$

   Reducimos términos semejantes en el segundo paréntesis: $\left(x \geq -\frac{4}{3}\right) \wedge (8x \geq -2 \wedge 2x \leq 6)$

   Despejamos x: $\left(x \geq -\frac{4}{3}\right) \wedge (x \geq -\frac{1}{4} \wedge x \leq 3)$

   El conjunto solución es $CS = \left[-\frac{1}{4}; 3\right]$. Observa la figura II.

Considera también los teoremas

$$|x| > b \Longleftrightarrow x < -b \vee x > b \quad ...(3)$$
$$|x| \geq b \Longleftrightarrow x \leq -b \vee x \geq b \quad ...(4)$$

Ejemplos:

1. Resuelve la inecuación: $|x + 8| \geq 12$

   Resolución:

   Toma la forma del teorema (3), la expresión algebraica está expresada por $x + 8$: $|x + 8| \geq 12$

   Aplicamos el teorema (4): $x + 8 \leq -12 \quad \vee \quad x + 8 \geq 12$

   Restamos 8 de cada parte y simplificamos: $x + 8 - 8 \leq -12 - 8 \quad \vee \quad x + 8 - 8 \geq 12 - 8$

   $$x \leq -20 \quad \vee \quad x \geq 4$$

   El conjunto solución es: $CS = \langle -\infty; -20] \cup [4; +\infty \rangle$, observa la figura III.

2. Resuelve la inecuación: $|2x - 2| \geq x + 1$

   Resolución:

   La inecuación toma la forma del teorema (4), las expresiones algebraicas en este caso son $x \rightarrow 2x - 2$ y $b \rightarrow x + 1$: $|2x - 2| \geq x + 1$

   Aplicamos el teorema (4): $2x - 2 \leq -x - 1 \ \vee \ 2x - 2 \geq x + 1$

   Reducimos términos semejantes: $2x - 2 + x + 2 \leq -x - 1 + x + 2 \ \vee \ 2x - 2 - x + 2 \geq x + 1 - x + 2$

   Simplificamos: $3x \leq 1 \quad \vee \quad x \geq 3$

   Dividimos la primera desigualdad entre 3: $\frac{3x}{3} \leq \frac{1}{3} \quad \vee \quad x \geq 3$

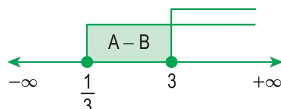
   Simplificamos: $x \leq \frac{1}{3} \quad \vee \quad x \geq 3$

   El conjunto solución es: $CS = \left\langle -\infty; \frac{1}{3}\right] \vee \left[3; -\infty\right\rangle$. Observa la figura IV.

3. Si se tienen los conjuntos: $A = \left[\frac{1}{3}; +\infty\right\rangle \wedge B = \left[3; +\infty\right\rangle$. Determina el conjunto A – B.

   Resolución:

   Veamos gráficamente.



   Según el gráfico no toma el valor de 3: $A - B = \left[\frac{1}{3}; 3\right\rangle$



Atención

La desigualdad $|x| \leq b$ para $b \geq 0$, según los teoremas, se puede escribir como:

$$x \geq -b \ \wedge \ x \leq b$$

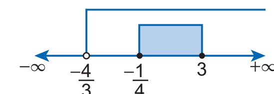
Nota

Figura I



Nota

Figura II



Observación

La representación de un número (a) positivo es:

$$a > 0$$



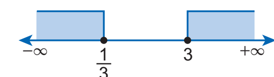
Nota

Figura III



Nota

Figura IV



Problemas resueltos

1 Resuelve:
$|3x + 1| \leq |x + 6| + |2x - 5|$

Resolución:
$|3x + 1| \leq |x + 6| + |2x - 5|$

Recuerda:
$|a + b| \leq |a| + |b|, \forall\ a; b \in \mathbb{R}$ (Desigualdad triangular)

Como: $3x + 1 = (x + 6) + (2x - 5)$

Entonces: $|(x + 6) + (2x - 5)| \leq |x + 6| + |2x - 5|$

$\therefore$ Cumple con la propiedad para todo $x \in \mathbb{R}$.

2 Indica un intervalo solución de:
$\dfrac{1}{|x|} \leq \dfrac{1}{2|x|+3} \leq \dfrac{1}{|x|+1}$

Resolución:
$\dfrac{1}{|x|} \leq \dfrac{1}{2|x|+3} \leq \dfrac{1}{|x|+1}$

Invirtiendo toma la siguiente forma:
$|x| \geq 2|x| + 3 \geq |x| + 1$
$|x| \geq |x| + 1$
$\therefore\ x \in \varnothing$

3 Resuelve:
$(|x|+ 1)(2x + 1)(|x|+ 3) \geq 0$

Resolución:
De la inecuación:
$\underbrace{(|x| + 1)}_{+}(2x + 1)\underbrace{(|x| + 3)}_{+} \geq 0$ (son siempre positivos)

$2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\dfrac{1}{2}$

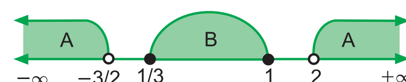
$\therefore x \in \left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right\rangle$

4 Sean los conjuntos:
$A = \{x \in \mathbb{R} / |4x - 1| > 7\}$
$B = \{x \in \mathbb{R} / |2x - 1| \leq x\}$
Halla $A \cap B$.

Resolución:
Si:
$A = \{x \in \mathbb{R} / |4x - 1| > 7\}$
$|4x - 1| > 7$
$4x - 1 > 7 \lor 4x - 1 < -7$
$x > 2 \lor x < -\dfrac{3}{2}$
$A = \left\langle -\infty; -\dfrac{3}{2}\right\rangle \cup \langle 2; +\infty\rangle$

$B = \{x \in \mathbb{R} / |2x - 1| \leq x\}$
$|2x - 1| \leq x$
$\Rightarrow x \geq 0 \land \{-x \leq 2x - 1 \leq x\}$
$x \geq 0 \land \{-x \leq 2x - 1 \land 2x - 1 \leq x\}$
$x \geq 0 \land \{x \geq \dfrac{1}{3} \land x \leq 1\}$
$B = \left[\dfrac{1}{3}; 1\right]$

Nos piden: $A \cap B$



$\therefore\ A \cap B = \varnothing$

5 Halla el CS de la inecuación:
$|x - 5| < |x - 7|$

Resolución:
De la inecuación:
$|x - 5| < |x - 7|$

Elevamos al cuadrado:
$(x - 5)^2 < (x - 7)^2$
$(x - 5)^2 - (x - 7)^2 < 0$
$(2x - 12)(2) < 0$
$x - 6 < 0 \Rightarrow x < 6$
$\therefore\ x \in \langle -\infty; 6\rangle$

6 Si $b > 0$ y además $|x - a| < 2b$, halla la variación de:
$\dfrac{b}{x - a + 3b}$

Resolución:
Tenemos:
$|x - a| < 2b; b > 0$

Por ser valor absoluto se cumple:
$-2b < x - a < 2b$

Sumamos 3b:
$3b - 2b < x - a + 3b < 2b + 3b$
$b < x - a + 3b < 5b$
$\dfrac{1}{5b} < \dfrac{1}{x - a + 3b} < \dfrac{1}{b}$

Multiplicamos por b:
$\dfrac{b}{5b} < \dfrac{b}{x - a + 3b} < \dfrac{b}{b}$

$\dfrac{1}{5} < \dfrac{b}{x - a + 3b} < 1$

$\therefore\ \dfrac{b}{x - a + 3b} \in \langle 1/5;\ 1\rangle$

LOGARITMOS

DEFINICIÓN

Dado un número real b positivo diferente de la unidad llamado base y un número N real positivo; se denomina logaritmo del número N en base b y se expresa $\log_b N$ al exponente x (real) al cual hay que elevar la base para obtener el número.

$$\log_b N = x \Longleftrightarrow N = b^x$$

Elementos: N: número, N > 0 (real positivo)
b: base del sistema de logaritmos ($b > 0 \wedge b \neq 1$)
x: logaritmo, $x \in \mathbb{R}$

Propiedades generales de los logaritmos

Si: $b > 0 \wedge b \neq 1$

1. $\log_b 1 = 0$
2. $\log_b b = 1$
3. $\log_b(MN) = \log_b M + \log_b N$; M; N > 0
4. $\log_b\left(\frac{M}{N}\right) = \log_b M - \log_b N$; M; N > 0
5. Regla del sombrero

   $\log_b N^n = n\log_b N$; $n \in \mathbb{R}$; N > 0
6. $\log_b M = \log_{b^n} M^n$; M > 0, $n \in \mathbb{R}$
7. $\log_b M = \log_{\sqrt[n]{b}} \sqrt[n]{M}$; $n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2$, M > 0
8. $\log_{b^n} M^m = \frac{m}{n}\log_b M$; n; $m \in \mathbb{R} \wedge n \neq 0$
9. $\log_N N^m = m$; $N \in \mathbb{R}^+$; $N \neq 1 \wedge m \in \mathbb{R}$

Atención

De las siguientes propiedades, veamos sus aplicaciones:

$$N = b^{\log_b N}$$

Su aplicación es:

- $3^{\log_3 2} = 2$
- $9^{\log_9 13} = 13$
- $(-4)^{\log_{(-4)} 10}$

No está definido, ya que la base es negativa.

$$\log_b b^x = x$$

Su aplicación es:

- $\log_5 625 = \log_5 5^4 = 4$
- $\log_2 256 = \log_2 2^8 = 8$
- $\log_{0,2} 0,008 = \log_{0,2}(0,2)^3 = 3$



CAMBIO DE BASE

Consiste en calcular el logaritmo de un número en una base en función de otra base donde los logaritmos son conocidos, es decir:

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

N: número, N > 0
b: base del logaritmo conocido
a: base del logaritmo desconocido
$a \wedge b > 0 \wedge a; b \neq 1$

Propiedades

1. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$; a; $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

2. Cociente de logaritmos

$$\frac{\log_a N}{\log_b N} = \log_a b$$

3. Regla de la cadena

a) Cerrada: $\log_b a \log_a c \log_c N = \log_b N$

b) Abierta: $\log_b a \log_c b \log_b c = \log_b a$

4. Potencia logarítmica

$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$; donde: a; b > 0 ; $c \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

Nota

$$\log_b^n M = (\log_b M)^n \neq \log_b M^n$$

COLOGARITMO

Es el logaritmo de la inversa del número en la misma base.

$$\text{colog}_b N = \log_b\left(\frac{1}{N}\right) = -\log_b N$$; donde: N > 0; $b > 0 \wedge b \neq 1$

Ejemplos:

- $\text{colog}_7 2401 = -\log_7 2401 = -4$
- $\text{colog}_4 0,25 = -\log_4 0,25 = -(-1) = 1$

Nota

Los principales sistemas de logaritmos son:

Sistema de logaritmos decimales, vulgares o de Briggs

Es el sistema en el cual la base es el número diez.

Notación:

$\log_{10}N <> \log N$

y se lee: logaritmo decimal de N.

Partes de un logaritmo decimal

Todo logaritmo decimal presenta una parte entera y una parte decimal; donde la primera se denomina CARACTERÍSTICA y la segunda, solo cuando es positiva, se llama MANTISA.

Así: $\log 700 = 2{,}845098\ ...$

Se tiene que:

Característica: 2
Mantisa: 0,845098 ... donde:

Sistemas de logaritmos neperianos o naturales

Usa como base del sistema el número trascendente **e**, cuyo valor aproximado es:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ ...$$
$$= 2{,}718\ 281\ 82\ ...$$

Notación: $\log_e A <> \ln A$

Se lee: logaritmo natural o logaritmo neperiano de **N**.

ANTILOGARITMO

Es el número que dio origen al logaritmo que se tiene como dato y se obtiene elevando la base a dicho número.

$$\text{antilog}_b x = N = b^x \quad \text{Donde: } x \in \mathbb{R},\ b > 0 \wedge b \neq 1$$

Ejemplos:

- $\text{antilog}_5(-2) = 5^{-2} = \dfrac{1}{25}$
- $\text{antilog}_2 3 = 2^3 = 8$

Propiedades

1. $\text{antilog}_b(\log_b N) = N$ $N > 0;\ b > 0 \wedge b \neq 1$

   Ejemplo:
   - $\text{antilog}_5(\log_5 2) = 2$

2. $\log_b(\text{antilog}_b x) = x$ $x \in \mathbb{R};\ b > 0 \ \wedge\ b \neq 1$

   Ejemplo:
   - $\log_7(\text{antilog}_7 10) = 10$

ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Se denominan ecuaciones logarítmicas a aquellas que tienen la incógnita dentro de un logaritmo como número o base. Para resolver estas ecuaciones se tienen que cumplir con las condiciones impuestas en la definición.

Siendo: $b > 0 \wedge b \neq 1$
La ecuación: $\log_b A(x) = \log_b B(x)$ se resuelve por medio de las relaciones:
$A(x) > 0 \ \wedge\ B(x) > 0$: CVA $\ \wedge\ A(x) = B(x)$

Ejemplo:
Resuelve la siguiente ecuación:

$$x + \log_{1424}(1 + 2^x) = x\log_{1424}712 + \log_{1424}72$$

¿Cuál es el número de soluciones?

Resolución:

La expresión se puede escribir como: $x + \log_{1424}(1 + 2^x) = x\log_{1424}\left(\dfrac{1424}{2}\right) + \log_{1424}72$

Hacemos uso de la propiedad de la división para logaritmos:
$$x + \log_{1424}(1 + 2^x) = x\underbrace{\log_{1424}1424}_{1} - x\log_{1424}2 + \log_{1424}72$$

El logaritmo de la base del logaritmo es igual a uno: $x + \log_{1424}(1 + 2^x) = x - \log_{1424}2^x + \log_{1424}72$

División de logaritmos en el segundo miembro: $\log_{1424}(1 + 2^x) = \log_{1424}\left(\dfrac{72}{2^x}\right) \Rightarrow 1 + 2^x = \dfrac{72}{2^x}$

Igualamos cada factor a cero: $(2^x)^2 + 2^x - 72 = 0 \quad \Rightarrow \quad (2^x + 9)(2^x - 8) = 0$

Por lo tanto, la ecuación tiene una única solución. Como: $2^x + 9 > 0 \Rightarrow 2^x - 8 = 0 \Rightarrow 2^x = 2^3$
$\Rightarrow x = 3$



Atención

Considera las siguientes propiedades para la resolución del ejemplo:

1. $\log\dfrac{M}{N} = \log M - \log N$

   $M;\ N > 0$

2. $\log\dfrac{A}{A} = 1$; $A > 1$

3. $n\log A = \log A^n$; $n \in \mathbb{N}$, $A > 1$

EFECTUAR

Grupo I

1. Calcula:
   $M = \log_2 32 + \log_3 81 - \log 100$
   $P = \log_4 64 - \log_5 25 + \log 10$
2. Halla **x** en $\log_x 16 = 2$
3. Halla **x** en $\log_2\left(\dfrac{x}{2} - 3\right) = 4$
4. Halla **x** en $\log_5\left(\dfrac{4x}{3} - 7\right) = 2$
5. Resuelve $7^{\log_7(x^4 + 2x^2 - 14)} = 1$

Grupo II

Calcula **x** en cada caso:

1. $\log 5 + \log_{15} 3 + \log 2 + \log_{15} 5 = \log_x 9$
2. $\log_3(x + 2) - \log_3 5 = \log_3 7 - \log_3 x$
3. $\log_3(5 - x) - \log_3 11 = \log_3 6 - \log_3(x + 12)$
4. $\log_2 6\ .\ \log_3 6 - \log_3 2 - \log_2 3$
5. $\log_7[\log_2(\log_5 x)] = 0$
6. $(4 - x)^{\log_8 5} = 5$
7. $\log_2[\log_2(x - 3)] = 2$



1 Simplifica:

$2^{\log_3 8^{\log_4 3}}$

Resolución:

$2^{\log_3 8^{\log_4 3}} = 2^{\log_4 3\,.\,\log_3 8} = 2^{\log_4 8}$ (Regla de la cadena)

$$= 2^{\log_{2^2} 2^3} = 2^{\frac{3}{2}\log_2 2} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$\therefore\ 2^{\log_3 8^{\log_4 3}} = 2\sqrt{2}$

2 Si: $\text{antilog}_b \text{colog}_b \log_b x = b^{-1}$

Calcula: $M = \log_b(-\text{colog}_b \text{antilog}_x b)$

Resolución:

Aplicamos definición de cologaritmos:

$\text{antilog}_b(-\log_b \log_b x) = b^{-1}$

$\text{antilog}_b(-\log_b b^x) = b^{-1}$

$(\log_b x)^{-1} = b^{-1}$

$x = b^b$

Reemplazamos:

$M = \log_b[-(-\log_b \text{antilog}_{b^b} b)]$

$M = \log_b[\log_b (b^b)^b]$

$M = \log_b[\log_b (b^{b^2})]$

$M = \log_b[b^2]$

$\therefore M = 2$

3 Resuelve: $\log_x 3\,.\,\log_{\frac{x}{3}} 3 + \log_{\frac{x}{81}} 3 = 0$

Luego determina el producto de sus raíces.

Resolución:

Llevando a base 3 tenemos:

$$\frac{\log_3 3}{\log_3 x} \cdot \frac{\log_3 3}{\log_3 \frac{x}{3}} + \frac{\log_3 3}{\log_3 \frac{x}{81}} = 0$$

$$\frac{1}{\log_3 x} \cdot \frac{1}{\log_3 x - \log_3 3} + \frac{1}{\log_3 x - \log_3 3^4} = 0$$

Llamaremos: $B = \log_3 x$

$$\frac{1}{B} \cdot \frac{1}{B-1} + \frac{1}{B-4} = 0$$

$$\frac{1}{B^2 - B} = \frac{-1}{B-4}$$

$B - 4 = B - B^2 \Rightarrow\ B^2 = 4$

$\therefore B = 2\ \vee\ B = -2$

Luego reemplazamos:

- $\log_3 x = 2 \Rightarrow 3^2 = x$
  $\Rightarrow x_1 = 9$
- $\log_3 x = -2 \Rightarrow 3^{-2} = x$
  $\Rightarrow x_2 = 1/9$

Nos piden: $x_1\,.\,x_2$

$\therefore x_1\,.\,x_2 = 9\,.\,\frac{1}{9} = 1$

4 Si: $2^a = 5^b = 10$. Calcula $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Resolución:

Dato: $2^a = 10$

Tomamos logaritmos en base 2:

$\log_2 2^a = \log_2 10\ \Rightarrow\ a\log_2 2 = \log_2 10\ \Rightarrow\ a = \log_2 10$

Dato: $5^b = 10$

Tomamos logaritmo en base 5:

$\log_5 5^b = \log_5 10$

$b\underbrace{\log_5 5}_{1} = \log_5 10 \Rightarrow b = \log_5 10$

Piden: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{\log_2 10} + \frac{1}{\log_5 10}$

Aplicamos cambio de base en el denominador:

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \log_{10} 2 + \log_{10} 5$

$= \log_{10}(2\,.\,5)$

$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \log_{10} 10 = 1$

5 Calcula: $M = \log_b a^{2010}\,.\,\log_{c^5} b\,.\,\log_a \sqrt{c}$

Resolución:

Aplicamos propiedades de los logaritmos a cada factor de la expresión M:

$M = 2010\,.\,\log_b a\,.\,\frac{1}{5}\log_c b\,.\,\log_a c^{\frac{1}{2}}$

$M = \frac{2010}{5}\,.\,\underbrace{\log_b a\,.\,\log_c b}_{\log_c a}\,.\,\frac{1}{2}\log_a c$

$M = 402\log_c a\,.\,\frac{1}{2}\log_a c$

$M = \frac{402}{2}\,.\,\underbrace{\log_c a\,.\,\log_a c}_{1}$

$\therefore M = 201$

6 Calcula x: $\left[2^{\log_8(2x+15)}\right]^3 = 4x + 13$

Resolución:

De la ecuación:

$\left[2^{\log_8(2x+15)}\right]^3 = 4x + 13$

$\left[2^{\log_{2^3}(2x+15)}\right]^3 = 4x + 13$

$\left[2^{\frac{1}{3}\log_2(2x+15)}\right]^3 = 4x + 13$

$2^{3.\frac{1}{3}\log_2(2x+15)} = 4x + 13$

$2^{\log_2(2x+15)} = 4x + 13$

$2x + 15 = 4x + 13$

$\therefore x = 1$

7 Calcula x si: $\log 5x = a$; $\log(x - 1) = b$.

Además: $a - b = 1$

Resolución:

Datos:

$\log 5x = a$

$\log(x - 1) = b$

$a - b = 1$

Reemplazamos a y b:

$\log 5x - \log(x - 1) = 1$

$$\log\left(\frac{5x}{x-1}\right) = \log 10$$

$$\frac{5x}{x-1} = 10$$

$x = 2(x - 1)$

$x = 2x - 2$

$\therefore x = 2$

DEFINICIONES PREVIAS

Producto cartesiano

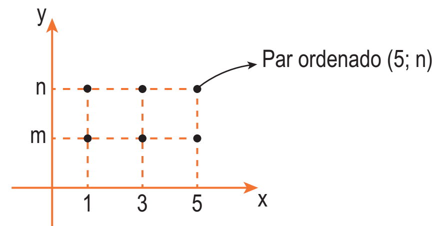
Sea el par ordenado (a; b); el producto cartesiano es un conjunto de pares ordenados.

Ejemplo:

Sean los conjuntos: $A = \{1; 3; 5\}$ y $B = \{m; n\}$

El producto cartesiano es: $A \times B = \{(1; m), (1; n), (3; m), (3; n), (5; m), (5; n)\}$

Gráficamente:



Donde: $n(A \times B)$: se lee n.° de elementos de $A \times B$

Además: $n(A \times B) = n(A) \,.\, n(B)$; donde n(A): n.° de elementos de A
n(B): n.° de elementos de B

Del ejemplo:

$n(A \times B) = n(A) \,.\, n(B) = 3 \times 2 = 6$ elementos

Observación

$A \times B \neq B \times A$

Par ordenado (a; b)
↓ ↓
1.ª 2.ª componente

$n(A \times B)$: se lee cardinal o n.° de elementos de $A \times B$.



Relación

Si se tienen 2 conjuntos no vacíos, la relación **R** es un subconjunto del producto cartesiano de los conjuntos.

$$R \subset A \times B$$

Ejemplo:

Sean los conjuntos: $M = \{5; 4; 3; 2\}$ y $N = \{7; 9\}$

$M \times N = \{(5; 7), (5; 9), (4; 7), (4; 9), (3; 7), (3; 9), (2; 7), (2; 9)\}$

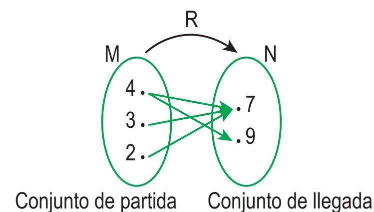
$R = \{(4; 7), (4; 9), (3; 7), (2; 7)\}$ es una relación; se encuentra incluido en $M \times N$

Se puede representar en un diagrama sagital:

Donde:

Dominio de R: $M = \{4; 3; 2\}$

Rango de R: $N = \{7; 9\}$



Nota

Al **conjunto de partida** se le conoce como **dominio de una relación.**
Al **conjunto de llegada** se le conoce como **rango de una relación.**

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

Es una relación entre 2 magnitudes. Si f es una función de A en B, se representa **f: A → B**
Si f es una función que depende de una variable x, se representa: **y = f(x)**

Donde: i) $f \subset A \times B$ $\wedge$ ii) Si (a; b) y $(a; c) \in A \times B \Rightarrow b = c$

Ejemplos:

Sean $A = \{a; b; c\}$ y $B = \{1; 2; 3\}$

$\Rightarrow A \times B = \{(a; 1), (a; 2), (a; 3), (b; 1), (b; 2), (b; 3), (c; 1), (c; 2), (c; 3)\}$

1. $f_1 = \{(a; 2), (b; 2), (c; 1)\}$; ¿es una función?

Se observa que $f_1 \subset A \times B$, a cada primera componente le corresponde un único valor.

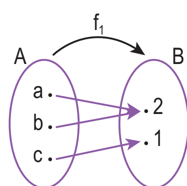
Recuerda

Toda función es una relación pero no toda relación es una función.





Mediante un diagrama:

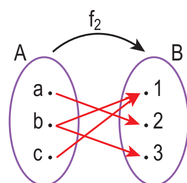


A cada elemento A le corresponde una única imagen o segunda componente en B.
$\therefore$ f_1 es una función.

2. $f_2 = \{(a; 2), (b; 1), (b; 3), (c; 1)\}$; ¿es una función?

Se observa que: $f_2 \subset A \times B$, y a la primera componente **b** le corresponde diferentes segundas componentes.
$\therefore$ f_2 no es función.

Mediante un diagrama:



A un elemento de A le corresponden 2 valores distintos en B.
$\therefore$ f_2 no es función.

Regla de correspondencia

Sea una función f definida por:

$$f = \{(x; y) \in A \times B \,/\, y = f(x)\}$$

Donde **y** = **f(x)**: se le conoce como regla de correspondencia y está representado por una ecuación que indica cómo varía "y" en función de "x".

Ejemplo:

Sean: $A = \{7; 8; 9\}$ y $B = \{10; 9; 0\}$

Determina $f = \{(x; y) \in A \times B \,/\, y = x + 1\}$

Resolución:

Determinamos primero $A \times B$

$A \times B$: {(7;10), (7; 9), (7; 0), (8; 10), (8; 9), (8; 0), (9; 10), (9; 9), (9; 0)}

Luego: x → ; $y = x + 1$, (x; y) ↓

x: valores de A ⇒

$x = 7 \Rightarrow y = 8$, $(7; 8) \notin A \times B$

$x = 8 \Rightarrow y = 9$, $(8; 9) \in A \times B$

$x = 9 \Rightarrow y = 10$, $(9; 10) \in A \times B$

$\therefore f = \{(8; 9), (9; 10)\}$

RECONOCIMIENTO Y GRÁFICOS DE UNA FUNCIÓN

1. Mediante una tabla de valores

Ejemplo:

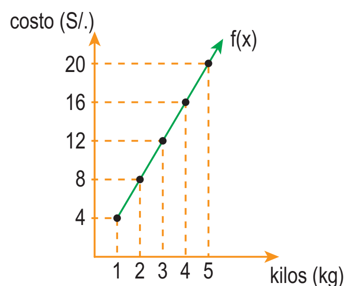
Michel compró una papaya de 3 kg a S/.12, representa en una tabla y en un gráfico el costo por kilogramo.

Resolución:

Costo	4	8	12	16	20
Kilos	1	2	3	4	5

$y = f(x)$; donde: y: costo

x: kilo



Nota

También podemos reconocer a una función como una dependencia.

Ejemplo:

- La distancia recorrida en un determinado tiempo.
- El costo de un producto en relación a su peso.

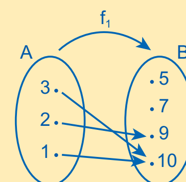
Observación

Analiza los siguientes ejemplos y sabrás cómo reconocer una función.

Ejemplos:

1. La relación:

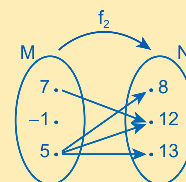
$f_1 = \{(3; 10), (2; 9), (1; 10)\}$



⇒ Es una función.

2. La relación:

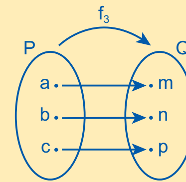
$f_2 = \{(7; 12), (5; 8), (5; 12), (5; 13)\}$



⇒ No es una función

3. La relación:

$f_3 = \{(a; m), (b; n), (c; p)\}$



⇒ Es una función.

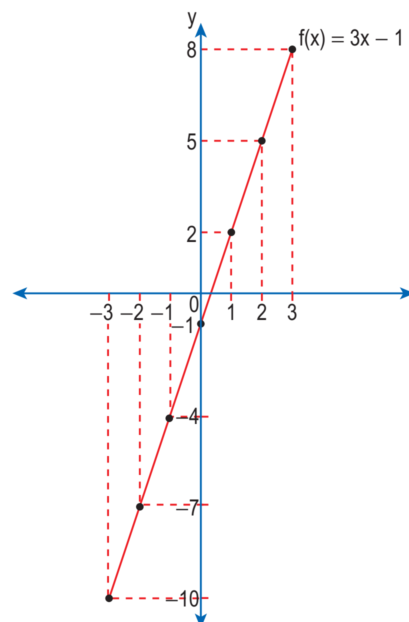


2. Mediante una ecuación o regla de correspondencia

Ejemplo:
Grafica $y = 3x - 1$

Resolución:
Tabulamos valores, ubicamos los puntos (x; y) y unimos los puntos.

x	$y = 3x - 1$
–3	–10
–2	–7
–1	–4
0	–1
1	2
2	5
3	8



Atención

Observa y analiza:

i) Sea f(x) = {(3; 4), (7; 5), (10; 9); (m; 4)} una función.
Como: f(3) = 4 ⇒ m = 3
f(7) + f(10) = 5 + 9 = 14
Domf(x) = {3; 7; 10}
Ranf(x) = {4; 5; 9}

ii) Si A = {2; 3; 5} y
B = {4; 8; 9; 10}
(f)x = {(x; y) ∈ A × B / $y = x^2$}
⇒ f(x) = {(2; 4), (3; 9)}
⇒ Domf = {2; 3} ∧ Ranf = {4; 9}



DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN

Dominio

El dominio de una función f(x) son los valores que toma la variable independiente **x**. En un subconjunto de A × B el dominio son las primeras componentes o conjunto de partida.

Notación: Domf o Df.

Rango

El rango de una función f(x) son los valores que toma la variable dependiente **y**. En un subconjunto de A × B el rango son las segundas componentes o conjunto de llegada.

Notación: Ranf o Rf.

Ejemplos:

1. Si f = {(3; 5), (4; 7), (4; m), (6; 1)} es función, determina el valor de m, Domf y Ranf.

   Resolución:
   Como f es función: (4; 7) = (4; m)
   ⇒ 7 = m

   ⇒ f = {(3;5),(4;7),(6;1)}
   Domf = {3; 4; 6} ∧ Ranf = {5; 7; 1}

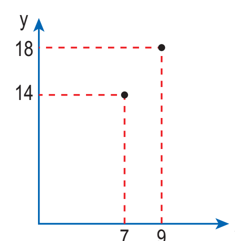
2. Sean: A = {3; 7; 9} y B = {4; 14; 18}
   Si f es una función definida como: f = {(x; y) ∈ A × B / y = 2x}
   Determina su dominio y rango.

   Resolución:
   De la regla de correspondencia:

x	y = 2x	(x; y)
3	6	(3; 6) ∉ A × B
7	14	(7; 14) ∈ A × B
9	18	(9; 18) ∈ A × B

   ⇒ f = {(7; 14), (9; 18)}
   Los x de f son 7 y 9 ∴ Domf = {7; 9}
   Los y de f son 14 y 18 ∴ Ranf = {14; 18}

   Su gráfica:



Atención

Si el dominio de una función coincide con el conjunto de partida se le conoce como aplicación.

Sea f: A → B

Si: Domf = A
⇒ f es una aplicación





3. Determina el rango de la función:
   $f(x) = 3x - 2;\ x = \{2; 3; 4\}$

   Resolución:

   Para: $x = 2 \Rightarrow f(x) = 3(2) - 2 = 4$

   $x = 3 \Rightarrow f(x) = 3(3) - 2 = 7$

   $x = 4 \Rightarrow f(x) = 3(4) - 2 = 10$

   Entonces: $Ranf = \{4; 7; 10\}$

4. Sea la función:
   $G = \{(2; 11); (5; a - 2b), (-4; 7); (2; 3a - 5b); (5; 4)\}$

   Halla: a^b

   Resolución:
   Determinamos los pares ordenados con iguales primeras componentes:
   $(2; 11)$ y $(2; 3a - 5b)$; $(5; a - 2b)$ y $(5; 4)$

   Por ser función:

   $$\begin{cases} 3a - 5b = 11 & \dots (1) \\ (a - 2b = 4)3 & \dots (2) \end{cases}$$

   Multiplicamos la ecuación (2) por 3 y le restamos (1), luego obtenemos $b = -1$.

   En (1): $3a - 5(-1) = 11$

   $$a = \frac{11 - 5}{3} = 2$$

   Reemplazamos los valores:

   $a^b = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

5. Halla el rango de la función:
   $H(x) = \frac{1}{3}x - 4;\ x \in]-3; 6[$

   Resolución:

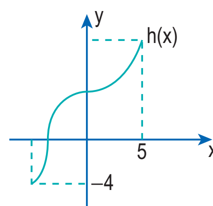
   Del dominio: $-3 < x < 6$

   $$-1 < \frac{x}{3} < 2$$

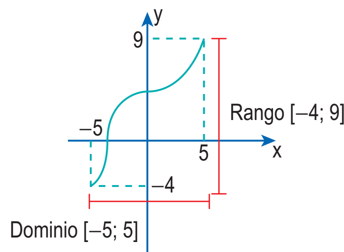
   $$-5 < \frac{x}{3} - 4 < -2$$

   Entonces el rango de $H(x)$ es: $\langle -5; -2 \rangle$

6. Sea la función h(x), determina su dominio y rango, si: $h(5) = 9 \wedge h(-4) = -5$



Resolución:



FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

Son aquellas funciones donde su dominio y rango están incluidos en los reales.

Si $y = f(x) \Rightarrow Domf \subset \mathbb{R};\ Ranf \subset \mathbb{R}$

Dominio y rango de funciones reales de la forma: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

Para hallar el dominio, se toman todos los valores de x excepto cuando $Q(x) = 0$.

Para hallar el rango, se despeja **y** en función de **x** y se procede como la premisa anterior.

Ejemplos:

Halla el dominio y el rango de: $f(x) = \frac{x - 6}{x - 2}$; $g(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

Resolución:

- $f(x) = \frac{x - 6}{x - 2} \Rightarrow x - 2 \neq 0$

  $\Rightarrow x \neq 2$

  $\therefore$ Domf: $\mathbb{R} - \{2\}$

  Calculamos el rango:

  $y = \frac{x - 6}{x - 2} \Rightarrow yx - 2y = x - 6 \Rightarrow x = \frac{2y - 6}{y - 1}$

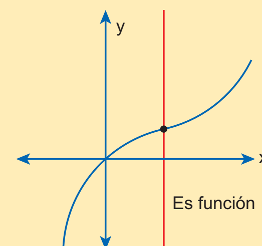
  Luego $y - 1 \neq 0 \Rightarrow y \neq 1$

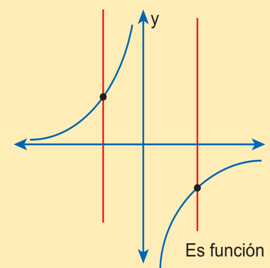
  $\therefore$ Ranf: $\mathbb{R} - \{1\}$

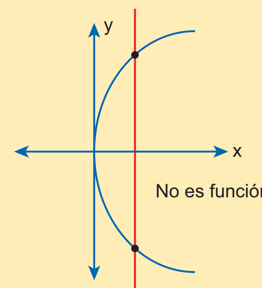
Importante

Gráficamente se reconoce a una función con un trazo vertical, el cual solo debe cortar a la gráfica en un solo punto.

Ejemplos:



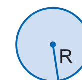






Nota

La función que relaciona el área de un círculo y su radio es: $A(R) = \pi R^2$

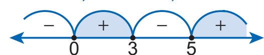


Nota

Método de los puntos críticos

- Se toman los de signos positivos (+) si la ecuación es mayor o igual a cero ≥ 0

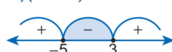
Por ejemplo:
$(x - 3)(x - 5)(x) \geq 0$
$x - 3 = 0;\ x - 5 = 0,\ x = 0$
$x = 3;\quad x = 5,\ x = 0$



$\Rightarrow$ CS = $[0; 3] \cup [5; +\infty\rangle$

- Si el signo de la desigualdad es menor o igual a cero (≤ 0); se toman los valores negativos (–); por ejemplo:

$(x - 3)(x + 5) \leq 0$



$\Rightarrow$ CS = $[-5; 3]$

- $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2} \Rightarrow$ factorizamos por aspa simple:

$x \quad -2$
$x \quad -1$ $\quad\Rightarrow (x - 2)(x - 1)$

Se observa: $(x - 2) \neq 0 \wedge (x - 1) \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \wedge x \neq 1$

$\therefore$ Domf: $\mathbb{R} - \{2; 1\}$

Calculamos el rango:

$y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$

Despejamos: $yx^2 - 3yx + 2y = 1$

$yx^2 - 3yx + 2y - 1 = 0,\ y \in \mathbb{R}$

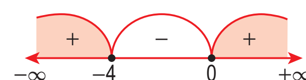
$\Rightarrow \Delta = (-3y)^2 - 4(y)(2y - 1) \geq 0$

$9y^2 - 8y^2 + 4y \geq 0$

$y^2 + 4y \geq 0$

$y(y + 4) \geq 0$

Puntos críticos: $y = 0 \wedge y = -4$



$\therefore$ Ranf: $]-\infty; -4] \cup [0; +\infty[$

Dominio y rango de funciones de la forma: $f(x) = \sqrt{Q(x)}$; $n \in \mathbb{R}^+$, n: par

Para hallar el dominio se hace $Q(x) \geq 0$ y se toman los valores de **x** que cumplan tal condición.

Para hallar el rango, se forma la ecuación $\sqrt{Q(x)}$ a partir de la restricción de **x**.

Ejemplo:
Halla el dominio y el rango de $f(x) = \sqrt{x - 4}$.

Resolución:
Dominio de f(x): $x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \quad \therefore$ Domf = $[4; +\infty\rangle$

Rango de f(x): $x \geq 4 \Rightarrow x - 4 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x - 4} \geq 0 \ \therefore$ Ranf = $[0; +\infty\rangle$

Dominio y rango de funciones de la forma: $f(x) = \sqrt[n]{Q(x)}$; $n \in \mathbb{R}^+ \wedge$ n: impar

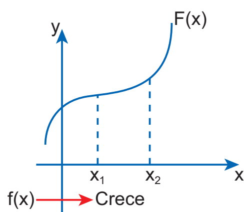
Domf = $\mathbb{R} \wedge$ Ranf = $\mathbb{R}$

Ejemplos:

- $f(x) = \sqrt[3]{x}$
  Domf: $\mathbb{R}$; Ranf: $\mathbb{R}$
- $f(x) = \sqrt[5]{x}$
  Domf: $\mathbb{R}$; Ranf: $\mathbb{R}$

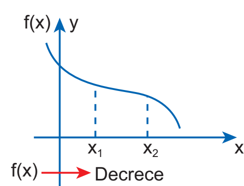
Nota

Función creciente



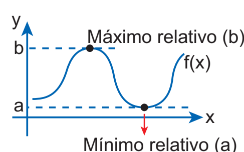
$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

Función decreciente



$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

Máximo relativo
Mínimo relativo a f(x)



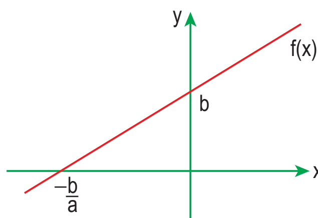
TIPOS DE FUNCIONES

Función lineal: $f(x) = ax + b$

Sus interceptos se hallan resolviendo: $f(x) = 0$ y evaluando $f(x) = f(0) = y$

Si: $f(x) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b}{a}$

Si: $f(x) = f(0) = y \Rightarrow y = b$



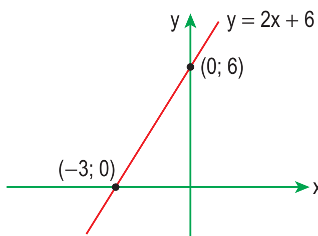
Ejemplo:

Grafica $y = 2x + 6$

Interceptos:

$f(x) = 0 \begin{cases} 0 = 2x + 6 \\ x = -3 \Rightarrow (-3; 0) \in y \end{cases}$

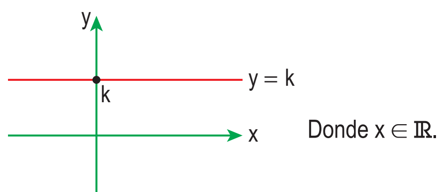
$f(0) = y \begin{cases} y = 2(0) + 6 \\ y = 6 \Rightarrow (0; 6) \in y \end{cases}$





Función constante: $f(x) = k$

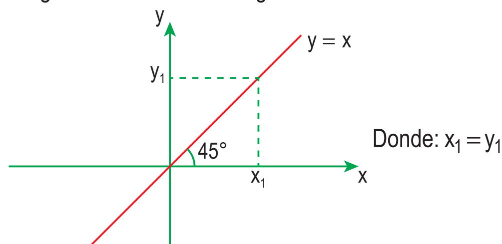
Su gráfica es una recta horizontal.



Donde $x \in \mathbb{R}$.

Función identidad: $f(x) = x$

Su gráfica es una recta diagonal.



Donde: $x_1 = y_1$



Recuerda

De la definición de valor absoluto sabemos que:

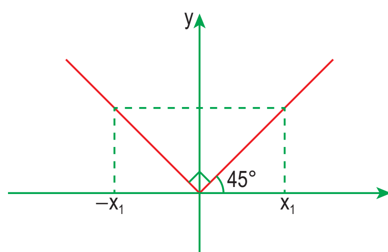
$|a| = a;$ si $a \geq 0$
$|a| = -a;$ si $a < 0$

Ejemplos:
$|7| = 7$
$|-7| = -(-7) = 7$
$|-3| = -(-3) = 3$

Entonces el valor absoluto de un número es siempre positivo y su gráfica está sobre el eje x.

Función valor absoluto: $f(x) = |x|$

Donde se cumple: $|x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$

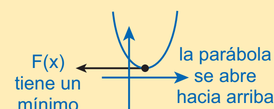


Donde: $f(x_1) = f(-x_1)$
Ranf(x): $\mathbb{R}^+$
Domf(x): $\mathbb{R}$

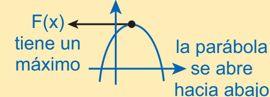
Atención

Sea la función cuadrática:
$f(x) = ax^2 + bx + c$

Si $a > 0$:



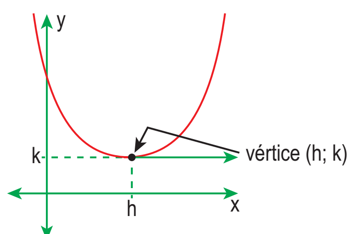
Si $a < 0$:





Función cuadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c$

f(x): función polinomial
Si: $a \neq 0$
Su gráfica, al tabularla, forma una parábola.



Donde:
Domf = $\mathbb{R}$
Ranf = $[k; \infty\rangle$

$$h = \frac{-b}{2a}$$

$k = f(h)$ (Para hallar k se evalúa h en f.)

También $k = c - \dfrac{b^2}{2a}$

Nota

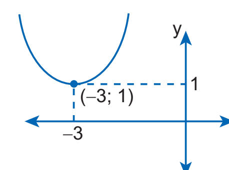
La función cuadrática también se puede expresar así:

$$y - k = a(x - h)^2$$

Donde (h; k) es el vértice de la parábola.

Ejemplo:
$y = x^2 + 6x + 10$
$y = (x + 3)^2 + 1$
$y - 1 = (x + 3)^2$
$y - \underbrace{1}_{k} = \underbrace{1}_{a}(x - \underbrace{(-3)}_{h})^2$

Se observa: $h = -3$; $k = 1$
$a = 1 > 0$ la parábola se abre hacia arriba.



La gráfica posee un mínimo en $(h; k) = (-3; 1)$

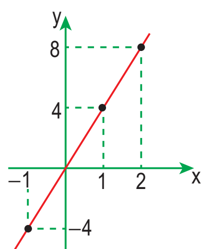
Funciones de proporcionalidad

Función de proporcionalidad directa

Es de la forma: $y = kx$

Ejemplo: $y = 4x$

x	y = 4x
–2	–8
–1	–4
0	0
1	4
2	8



Donde $y \wedge x$ aumentan o disminuyen en la misma proporción.

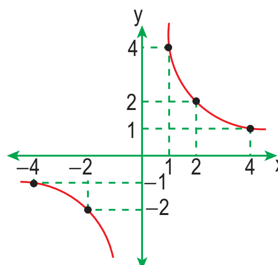
Función de proporcionalidad inversa

Es aquella función que presenta la forma:

$y = \dfrac{k}{x}$; $x \neq 0$

Ejemplo: $y = \dfrac{4}{x}$

x	y = 4/x
–4	–1
–2	–2
1	4
2	2
4	1



Donde si y aumenta x disminuye en igual proporción y viceversa.

Problemas resueltos

1 Si el conjunto:
$H = \{(-5; a+1), (-2; b-7), (-2; 9), (-5; 10)\}$ es una función, indica el valor numérico de $\sqrt{a+b}$.

Resolución:
Para ser una función debe cumplirse las siguientes igualdades:
- $(-5; a+1) = (-5; 10)$
  $a + 1 = 10 \Rightarrow a = 9$
- $(-2; b-7) = (-2; 9)$
  $b - 7 = 9 \Rightarrow b = 16$

$\therefore \sqrt{a+b} = \sqrt{25} = 5$

2 Si: $B = \{0; 2; 4; 6\}$ y $C = \{0; 2; 8; 18; 32\}$
Determina la función, dominio y rango de:
$F = \{(x; y) \in B \times C \,/\, y = 2x\}$

Resolución:

x	y = 2x	(x; y)
0	0	$(0; 0) \in B \times C$
2	4	$(2; 4) \notin B \times C$
4	8	$(4; 8) \in B \times C$
6	12	$(6; 12) \notin B \times C$

$F = \{(0; 0), (4; 8)\} \Rightarrow DomF = \{0; 4\}$; $RanF = \{0; 8\}$

3 Sean las funciones:
$F = \{(7; 4), (-3; 1), (0; 3), (5; 4)\}$
$G = \{(-1; 5), (7; -3), (10; 1), (3; -1)\}$
Determina: $DomF \cap RanG$

Resolución:
$DomF = \{7; -3; 0; 5\}$
$RanG = \{5; -3; 1; -1\}$
$\Rightarrow DomF \cap RanG = \{5; -3\}$

4 Halla el dominio y rango de:
$f(x) = \dfrac{3x-2}{x-1}$

Resolución:
Analizamos el denominador para determinar el dominio:
$x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$
Entonces: $Domf(x) = \mathbb{R} - \{1\}$
Para el rango: $y = \dfrac{3x-2}{x-1} \Rightarrow yx - y = 3x - 2$

$$x = \frac{y-2}{y-3}$$

Donde: $y - 3 \neq 0 \Rightarrow y \neq 3$
Entonces: $Ran(x) = \mathbb{R} - \{3\}$

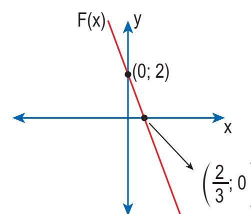
5 Sea la función $F(x) = 2 - 3x$; si el $DomF \in [-3; 2]$, indica el rango:

Resolución:
Por dato del dominio tenemos:
$-3 \leq x \leq 2$
$-2 \leq -x \leq 3$
$-6 \leq -3x \leq 9$
$-4 \leq 2 - 3x \leq 11$
$\therefore RanF = [-4; 11]$
Si F(x) es una función lineal, entonces los interceptos con los ejes son:

$F(x) = 0 = 2 - 3x \Rightarrow x = \dfrac{2}{3}$; $\left(\dfrac{2}{3}; 0\right) \in F(x)$

$F(x) = y = 2 - 3(0) \Rightarrow y = 2$; $(0; 2) \in F(x)$

Gráficamente:



6 Siendo: $f(x) = 6x^2 - 10x + 4$
Calcula: $f(3) + f(-2)$

Resolución:
$f(3) = 6(3)^2 - 10(3) + 4 = 28$
$f(-2) = 6(-2)^2 - 10(-2) + 4 = 48$
$\therefore f(3) + f(-2) = 28 + 48 = 76$

7 Si f(x) es una función lineal, determina su regla de correspondencia.
Si $f(1) = 3$ y $f(3) = -7$

Resolución:
Sea: $f(x) = ax + b$
De los datos:
$f(1) = 3 = a(1) + b$ ... (1)
$f(3) = -7 = a(3) + b$ ... (2)
De (2) – (1): $-10 = 2a$
$\Rightarrow a = -5$
Reemplazando en (1): $b = 8$
$\therefore f(x) = -5x + 8$

8 Sea la función: $H(x): \begin{cases} x - 1; x \geq 0 \\ x^2; x < 0 \end{cases}$

Determina: $\dfrac{H(7) + H(-2)}{H(3)}$

Resolución:

Observamos que si el dominio es mayor que cero:

$H(x) = x - 1 \Rightarrow H(7) = 7 - 1 = 6$

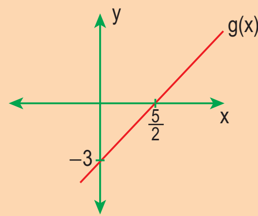
$H(3) = 3 - 1 = 2$

Si el dominio es menor que cero:

$H(x) = x^2 \Rightarrow H(-2) = (-2)^2 = 4$

$$\therefore \frac{H(7) + H(-2)}{H(3)} = \frac{6+4}{2} = 5$$

9 Determina la regla de correspondencia de g(x):



Resolución:

Observamos que g(x) es una función lineal:

$\Rightarrow g(x) = ax + b$ (forma general)

Notamos también que la función pasa por:

$(0; -3)$ y $\left(\frac{5}{2}; 0\right)$

Evaluamos en la función:

$-3 = a(0) + b$ ... (1)

$0 = a\left(\frac{5}{2}\right) + b$ ... (2) (–)

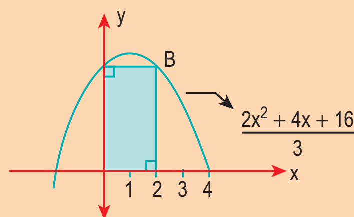
$-3 = -\frac{5}{2}a$

$a = \frac{6}{5}$; en (2): $\frac{6}{5}\left(\frac{5}{2}\right) + b = 0$

$b = -3$

$\therefore g(x) = \frac{6}{5}x - 3$

10 Determina el área de la figura sombreada:



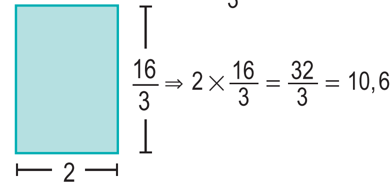
Resolución:

Hallamos el punto B:

$$B: (2; y) \Rightarrow y = \frac{-2(2)^2 + 4(2) + 16}{3}$$

$$y = \frac{16}{3} \Rightarrow B = \left(2; \frac{16}{3}\right)$$

$\therefore$ El área de la figura es: $\frac{16}{3}$



11 Grafica e indica el máximo valor que toma: $f(x) = -x - 3x^2$

Resolución:

$f(x) = \underset{a}{-3}x^2 \underset{b}{-}x$; es una parábola

Determinamos el vértice (h; x):

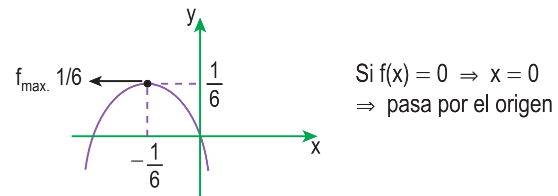
$$h = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-1)}{2(-3)} = -\frac{1}{6}$$

$$k = f(h) = f(-1/6) = -3\left(-\frac{1}{6}\right)^2 - \left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$k = -\frac{1}{12} + \frac{1}{6}$$

$$k = \frac{1}{6}$$

$a < 0 \Rightarrow$ la parábola se abre hacia abajo:



Si $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow$ pasa por el origen

12 Grafica f(x) y g(x) y determina los puntos de corte.
$f(x) = -1 \wedge g(x) = |x| - 2$

Resolución:

Para determinar el punto de intersección se igualan las funciones:

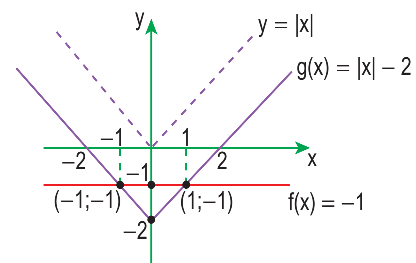
$f(x) = g(x) \Rightarrow -1 = |x| - 2$

$|x| = 1$

$\Rightarrow x = \pm 1$

Luego, los puntos de intersección o puntos de corte son:
(1; –1) y (–1; –1)

Gráficamente:



IDEA DE PROGRESIÓN

Martín se prepara para entrar a una competencia de ciclismo, el primer día recorre 5 km, el segundo recorre 400 m más que el primer día, el tercer día 800 m más y cada día que pasa recorre 400 m más que el día anterior.

A) Determina cuántos metros recorre el día 15 y el día 30.

B) ¿Cuántos kilómetros recorrerá al cabo de un mes?

Resolución:

1.er día: 5000 + (1 – 1)400 = 5000 m

2.° día: 5000 + (2 – 1)400 = 5400 m

3.er día: $\underbrace{5000 + (3 - 1)400}_{\text{ley de formación}}$ = 5800 m

⋮

día n: 5000 + (n – 1)4000

A) Los metros que recorre los días 15 y 30 son:

Día 15: 5000 + (15 – 1)400 = 10 600 m

Día 30: 5000 + (30 – 1)400 = 16 600 m

B) Para saber el recorrido en un mes:

1.er día: 5000 + (1 – 1)400

2.° día: 5000 + (2 – 1)400 sumamos

3.er día: 5000 + (3 – 1)400

4.° día: 5000 + (4 – 1)400

⋮

n-ésimo día n: 5000 + (n – 1)400

n(5000) + 400$\underbrace{(0 + 1 + 2 \ldots + n - 1)}$

Suma de los n – 1 números naturales.

$\Rightarrow \sum = 5000n + 400\frac{(n-1)n}{2}$

Por lo tanto:

Fin de mes: $n = 30 \Rightarrow 5000(30) + \frac{400(29)30}{2} = 174\,000$ m ó 174 km

DEFINICIONES PREVIAS

Sucesiones

Es el conjunto de términos ordenados de acuerdo a una ley o regla.

Ejemplos:

–4; –2; 0; 2; es una sucesión **finita** cuya regla de formación es: 2n – 6

1; $\frac{4}{3}$; $\frac{6}{4}$; ... es una sucesión **infinita** cuya regla de formaci{on es: $\frac{2n}{n+1}$

Progresiones

Es una sucesión especial, existen varias formas de progresiones.

Las principales son:

- Progresión aritmética
- Progresión geométrica
- Progresión armónica

PROGRESIÓN ARITMÉTICA (PA)

Es la sucesión donde cualquiera de sus términos a partir del segundo disminuido por su respectivo antecedente, nos da una constante llamada razón.

Ejemplo:

–13; –9; –5; –1; ...

Entonces, es una PA de razón:

$$\left.\begin{array}{l} -9-(-13)=4 \\ -5-(-9)=4 \\ -1-(-5)=4 \end{array}\right\} \text{constante}$$

Forma general de una PA

: t_1; t_2; t_3; ... ; t_n (+r, +r)

Donde: t_1: primer término.

t_n: término enésimo (último término).

r: razón (constante).

Nota

Series:
Es una sumatoria de términos

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Series notables:

Sumatoria de los n números naturales.

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Sumatoria de los n primeros números naturales pares

$$\sum_{k=1}^{n} 2k = 2+4+6+\ldots+2n = n(n+1)$$

Sumatoria de los n primeros números naturales impares

$$\sum_{k=1}^{n} 2k-1 = 1+3+5+\ldots+2n-1 = n^2$$

Debes saber que

Si la razón de una progresión aritmética es:

- Positiva, $r > 0 \Rightarrow$ PA es creciente.
- Negativa, $r < 0 \Rightarrow$ PA es decreciente.





En toda PA se cumple:
$t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = ... = t_n - t_{n-1} = r$

En general: $r = t_n - t_{n-1}$

Término de lugar k (k-ésimo término) de una PA

De la forma general de la PA:

$$t_1 = t_1$$
$$t_2 = t_1 + r$$
$$t_3 = t_1 + 2r$$
$$\vdots \quad \vdots$$
$$t_k = t_1 + (k-1)r$$

Ejemplo:
En la siguiente PA determina r; el término de lugar 10 e indica si es PA creciente o decreciente.
:–2; 4; 10; ... ; 304

Resolución:

- Como es PA, entonces la razón es: $4 - (-2) = 6$ ó $10 - 4 = 6$
- El término de lugar 10: $t_{10} = t_1 + (10 - 1)r$ (con $t_1 = -2$ y $r = 6$)

  Reemplazando: $t_{10} = -2 + (9)6 = 52$
- Es una PA creciente ($r > 0$)

Número de términos de una PA

$$n = \frac{t_n - t_1}{r} + 1$$

Donde: t_n: último término
t_1: primer término
r: razón de la PA

Suma de los n términos de la PA

$$S_n = t_1 + t_2 + t_3 + ... + t_n \Rightarrow S_n = \left(\frac{t_1 + t_n}{2}\right)n$$

Si reemplazamos: $t_n = t_1 + (n-1)r$

$$\Rightarrow S_n = \left(\frac{2t_1 + (n-1)r}{2}\right)n$$

Interpolación de medios aritméticos

Interpolar m medias aritméticas entre dos términos t_n y t_k, consiste en formar una PA cuyo primer término es t_1 y el último t_n, además el número de términos es m + 2.

Para la interpolación es necesario calcular la razón de interpolación.

$$r = \frac{t_n - t_1}{m + 1} + 1$$

Ejemplo:
Interpola 4 medios aritméticos entre los números 3 y 28.

Resolución:
Sabemos que:
$t_1 = 3; t_n = 28$
Por dato: $m = 4$
Entonces n.° de términos es:
$m + 2 = 4 + 2$
Hallamos la razón:
$$r = \frac{28 - 3}{4 + 1} = 5$$
Interpolamos:
3; 8; 13; 18; 23; 28

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA (PG)

Es una sucesión de términos en la que la división de dos términos consecutivos cualesquiera nos da un valor constante llamada razón geométrica.
Sea la PG: :: t_1; t_2; t_3; ...; t_n (de cada término al siguiente: ×q, ×q)

Nota

En una PA finita la suma da los términos equidistantes nos da un valor constante.

Sea la PA:
: t_1; t_2; t_3; ...; t_{n-2}; t_{n-1}; t_n
$\Rightarrow t_1 + t_n = t_2 + t_{n-1} = t_3 + t_{n-2} ...$

Recuerda

Medios aritméticos o diferenciales
Son los términos de una progresión aritmética comprendidos entre los términos extremos.
Ejemplo
4; 7; 10; 13; 16
(7; 10; 13): 3 medios aritméticos



Observación

Si una PA posee un número impar de términos:
:t_1; t_2; ... t_n para n impar
⇒ tc: término central

$$t_c = \left(\frac{t_1 + t_n}{2}\right)$$

$$s_n = t_c \times n$$

Donde:
t_1: primer término
t_n: término enésimo o último término
q: razón
n: n.° de términos

Donde se cumple: $\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} ... = q$ En general $q = \frac{t_k}{t_{k-1}}$; donde q es la razón geométrica

Entonces la PG se puede escribir así: $:: t_1; t_1q; t_1q^2; ...; t_1q^{n-1}$

Ejemplos:
- 7; 14; 21; ... $\Rightarrow$ q = 2 (PG creciente $q > 1$)
- 81; 27; 9; ... $\Rightarrow$ q = 1/3 (PG decreciente $0 < q < 1$)
- 3; –6; 12; –24 ... $\Rightarrow$ q = –2 (PG oscilante $q < 0$)

Atención

A las progresiones geométricas también se les conoce como progresiones por cociente.



Término de lugar k de una PG

$t_k = a_1q^{k-1}$ t_k: término k-ésimo o término de lugar k

Suma de las k primeros términos de una PG

$S_k = t_1 + t_1q + t_1q^2 + t_1q^3 + ... + t_1q^{k-1}; ...$

$S_k = t_1(\underbrace{1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{k-1}}_{\text{Cociente notable}})$

$S_k = t_1\frac{(q^k - 1)}{q - 1}$; donde k: n.° de términos

Nota

Término central de una PG
Sea la PG de n términos (n impar)
$t_1; t_2; ... ;t_n$

$\Rightarrow$ $t_c = \sqrt{t_1.t_n}$

Ejemplo:

Sea la PG: :: 3; 6; 12; ...

Determina la razón, el término de lugar 15 y la suma de los 10 primeros términos de la PG.

Resolución:

La razón se determina dividiendo dos términos consecutivos:

$\Rightarrow r = \frac{6}{3} = 2$

- Término de lugar 15 (término k-ésimo):
  $t_k = t_1q^{k-1} \Rightarrow t_{15} = 3(2)^{15-1} \Rightarrow t_{15} = 3(2)^{14}$
- La suma de los 10 primeros términos es:
  $S_{10} = t_1\frac{(q^{10} - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_{10} = \frac{3(2^{10} - 1)}{2 - 1}$
  $S_{10} = 3(2^{10}) - 3 = 3069$

Observación

- 9; 3; 1; ...
- $\frac{1}{4}; \frac{1}{16}; \frac{1}{32}; ...$

Son PG de razón q ($0 < q < 1$) cuya suma se calcula así:

- $\frac{9}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{27}{2}$
- $\frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{12}$



Suma límite de una PG decreciente e infinita

Sea la PG:
$t_1; t_2; ... ; t_{n-1}; t_n; ...$
×q ×q

$\Rightarrow$ $S_{límite} = \frac{t_1}{1 - q}$

donde: $0 < q < 1$

Producto de los k términos de una PG

$P_k = \sqrt{(t_1.t_k)^k}$

Interpolación de medios geométricos

Interpolar m medios geométricos entre los números t_1 y t_n es formar una progresión geométrica cuyo primer término es t_1, el último t_n y el número de términos es (m + 2). Para poder interpolar se debe calcular la razón de interpolación.

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{t_n}{t_1}}$$

Ejemplo:
Interpola tres medios geométricos entre 2 y 32.

Resolución:
Se tiene: $t_1 = 2$; $t_n = 32$ y m = 3
Reemplazando obtenemos el valor de la razón:
$q = \sqrt[3+1]{\frac{32}{2}} = 2$

Interpolamos:
$2; \underbrace{4; 8; 16;}_{\text{medios interpolados}} 32$

Problemas resueltos



1 De las siguientes progresiones, determina t_{10}, S_{10} y el número de términos.

A) 7; 16; 25; 34; ...; 133 B) $0,\widehat{3}$; 1; 3 ; ...; 3^{16}

Resolución:

A) 7; 16; 25; 34; ...; 133 es una PA

- $r = 16 - 7 = 9$

  Entonces: $t_{10} = 7 + (9)9$

  $t_{10} = 88$

- $S_{10} = \dfrac{(88+7)10}{2} = 475$

- $n = \dfrac{133-7}{9} + 1 = 15$ términos

B) $\dfrac{1}{3}$; 1; 3; ...; 3^{16} es una PG

- $q = \dfrac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

  Entonces: $t_{10} = \dfrac{1}{3}(3)^9 = 3^8$

- $S_{10} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3^{10}-1}{3-1}\right) = 9841,\widehat{3}$

- $t_n = \dfrac{1}{3}\,.\,(3)^{n-1}$

  $3^{16} = \dfrac{1}{3}\,.\,3^{(n-1)}$

  $3^{16} = 3^{n-2}$

  $\Rightarrow\ n - 2 = 16$

  $n = 18$ términos

2 La razón de una PG es 2; el número de términos es 11 y la suma de ellos es 2047. Halla la suma de los extremos.

Resolución:

Por fórmula sabemos:

$$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} \Rightarrow 2047 = \frac{a_1(2^{11}-1)}{2-1}$$

$$\Rightarrow a_1 = 1$$

Luego hallamos el término 11:

$a_{11} = 1(2)^{11-1} \Rightarrow a_n = 1024$

$\therefore\ a_1 + a_n = 1025$

3 En la PG:

$\because \dfrac{1}{729}; \dfrac{1}{243}; ...$

Calcula a_{13}.

Resolución:

Sabemos que:

$a_1 = \dfrac{1}{729} \wedge q = 3$

Entonces:

$a_{13} = a_1.q^{12} = \dfrac{1}{729}.3^{12}$

$\therefore a_{13} = \left(\dfrac{1}{3^6}\right).3^{12} = 3^6 = 729$

4 Sabiendo que el término central de una PA de 15 términos es 20. Calcula S_{15}.

Resolución:

Se sabe:

$t_c = \left(\dfrac{a_1 + a_n}{2}\right) = 20$

Además:

$S_{15} = t_c.n = \left(\dfrac{a_1+a_n}{2}\right)n = 20 \times 15 = 300$

$\therefore\ S_{15} = 300$

5 Calcula:

$S = \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + ...\right)\left(1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + ...\right)$

Resolución:

Por fórmula de suma límite sabemos:

$S_{\text{límite}} = \dfrac{a_1}{1-q}$

$S_{\text{límite}} = \left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)$

$S_{\text{límite}} = (2)(\frac{3}{2})$

$\therefore S_{\text{límite}} = 3$

6 Interpola 10 términos diferenciales entre 2 y 123 y encuentra el quinto término.

Resolución:

Sea la progresión aritmética:

$\div\ 2\ ;\ \underbrace{...}_{10\ \text{términos}}\ ;\ 123$

Por fórmula:

$r = \dfrac{123-2}{10+1} = \dfrac{121}{11} \Rightarrow r = 11$

Piden el quinto término:

$a_n = a_1 + (n-1)r$

$a_5 = 2 + (5-1)11 = 2 + 44$

$a_5 = 46$

7 Determina el valor de:
$S = 7 + 14 + 21 + 28 + ... + 70$

Resolución:

$S = 7 + 7(2) + 7(3) + 7(4) + ... + 7(10)$

$S = 7(\underbrace{1 + 2 + 3 + 4 + ... + 10}_{\frac{(10)(11)}{2}})$

$S = \dfrac{7 \times 10 \times 11}{2} = 385$

8 Determina el valor de x.
$4 + 6 + 8 + ... + x = 108$

Resolución:

Aplicamos suma de términos:

$S_n = \left(\dfrac{x+4}{2}\right)n = 108 \quad ... (1)$

Hallamos el n.°: de términos (n) de la PA de razón 2.

$n = \dfrac{x-4}{2} + 1 = \dfrac{x-4}{2} + 1$

Reemplazamos el valor de n en (1):

$\left(\dfrac{x+4}{2}\right)\left(\dfrac{x-4}{2} + 1\right) = 108$

$\underbrace{(x + 4)(x - 2)}_{\text{2 números que se diferencian en 6}} = \underbrace{4 \times 18}_{24 \times 18}$

$\Rightarrow x + 4 = 24$

$\therefore\ x = 20$

9 Indica el valor de $\sum_{i=3}^{i=12} 3i$.

Resolución:

$\sum_{i=3}^{i=12} 3i = \underbrace{3(3) + 3(4) + 3(5) + ... + 3(12)}_{3\underbrace{(3+4+5+...+12)}_{(12+3)10}}$

$\sum_{i=3}^{i=12} 3i = 3 \times 15 \times 10 = 450$

10 Halla el valor de M + N; si:
$M = 13 + 18 + 24 + ... + 127$
$N = 7 + 14 + 21 + ... + 70$

Resolución:

M es una suma de una PA de razón 6:

$M = \left(\dfrac{127 + 13}{2}\right)n;\ n = \dfrac{127 - 13}{6} + 1 = 20$

$\Rightarrow M = \left(\dfrac{140}{2}\right)20 = 1400$

N es una suma de una PA de razón 7:

$N = \left(\dfrac{70 + 7}{2}\right)n;\ n = \dfrac{70 - 7}{7} + 1 = 10$

$\Rightarrow N = \dfrac{77}{2} . 10 = 385$

$\therefore\ M + N = 1400 + 385 = 1785$

11 Halla el valor de: $S = 0{,}4 + 0{,}25 + 0{,}128 + ...$

Resolución:

$S = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + ...$ (suma límite)

$S = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

12 Determina el primer término de una PA si el séptimo término es 37 y el undécimo 49.

Resolución:

$t_7 = t_1 + 6r = 37 \quad ... (1)$

$t_{11} = t_1 + 10r = 49 \quad ... (2)$

$(2) - (1): \quad 4r = 12$

$r = 3$

En (1): $t_1 + 6(3) = 37$

$t_1 = 37 - 18$

$\therefore\ t_1 = 19$

13 Resuelve la siguiente suma en función de x:
$S = \underbrace{x + x^3 + x^5 + ... + x^n}_{\text{15 términos}}$; además indica el valor de n.

Resolución:

Determinamos n.

Los exponentes forman una PA:

$\Rightarrow \dfrac{n-1}{2} + 1 = 15 \quad \Rightarrow n - 1 = 28$

$n = 29$

Luego; resolvemos la suma; es una PG de razón x^2:

$\Rightarrow\ x + x^3 + x^5 + ... + x^{29} = \dfrac{x\left((x^2)^{15} - 1\right)}{x^2 - 1} = \dfrac{x^{16} - x}{x^2 - 1}$